UNIVERSITE DE CAEN
IUT Caen
Département Réseaux et Télécommunications

Année universitaire 2013-2014

Mathématique Module 2204 — CC (1h30)

****

Seuls documents autorisés : fiche de trigonométrie et formulaire de primitives/dérivées classiques. Tout autre document interdit (dont téléphone portable et calculatrice). Les 4 exercices sont indépendants. Le barême est indicatif.

****

Exercice 1 (niveau élémentaire, cours, 5 points, temps estimé : 10 minutes)

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f. Exprimer $\int_a^b f(t)dt$ en fonction de F.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. une fonction continue. Soit $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ continue et dérivable sur $[a,b]$ tel que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Ecrire la formule de changement de variable relative à $\int_a^b f(t)dt$.
3. Soit $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $[a,b]$. Donner la formule d'intégration par partie relative à l'intégrale $\int_a^b u(t)v(t)dt$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre $\frac{dy}{dt}(t) + ay(t) = g(t)$. Donner la forme générale des solutions de cette équation.
5. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose $a \neq 0$. Donner, suivants les cas, la forme générale des solutions de l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre
$$a\frac{d^2y}{dt^2}(t) + b\frac{dy}{dt} + cy(t) = 0$$

Exercice 2 (niveau élémentaire, Exercices traités en TD, 7 points, temps estimé 40 minutes)

1. (Feuille 1) Calculer $\int_0^\pi tsin(t)dt$ et $\int_e^{e^2} \frac{1}{tln(t)}dt$ (pour la seconde intégrale, on fera le changement de variable x = ln(t)).
2. (Feuille 2) Calculer $\int_2^4 \frac{1}{t(t^2-1)}dt$.
3. (Feuille 3) Déterminer toutes les solutions de l'équation $\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 2sin(t + \frac{\pi}{4})$.

Exercice 3 (niveau intermédiaire, 4 points, temps estimé 20 minutes)

1. Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^4 (sin(t))^5 dt$.
2. Résoudre l'équation différentielle à coefficients constants suivante.

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) - 3\frac{dy}{dt}(t) - 4y(t) = e^{-t} sin(2t).$$

On cherchera une solution particulière de la forme $e^{-t}(acos(2t) + bsin(2t))$.

Exercice 4 (niveau difficile, 4 points, temps estimé 20 minutes)

1. Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^1 \frac{3x+2}{4x^2+5} dx$.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation $\frac{d^2y}{dt^2}(t)+4\frac{dy}{dt}(t)+5y(t) = 40cos(3t)cos(2t)$.
(on pourra commencer par montrer que $cos(3t)cos(2t) = \frac{1}{2}(cos(\alpha t) + cos(\beta t))$ avec α et β à déterminer)