M 1205: Harmonisation des connaissances et des outils pour le signal

E. Godelle

Univ. Caen, IUT Caen, Dépt. R& T

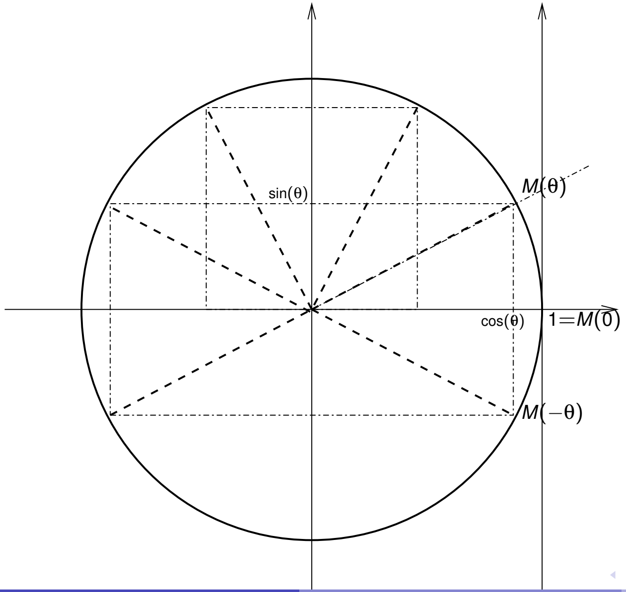
2014 - 2015

Chapitres du module :

1. Du cercle trigonométrique à la fonction sinus
2. Les autres fonctions classiques
3. Fonctions harmoniques
4. Intégrales appliquées
5. Intégrales appliquées
6. Intégrales appliquées
7. Fonctions de base en théorie du signal
8. Fonctions usuelles en théorie du signal
9. Fonctions usuelles en théorie du signal

Le cercle trigonométrique à la fonction sinus

Le cercle trigonométrique



Valeurs remarquables des angles :

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$-$

On a :

1. $(cos(\theta))^2 + (sin(\theta))^2 = 1.$
2. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$.
3. $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$.
4. $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$ et $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.

on peut donc définir une fonction sinus qui à un nombre réel associe son sinus.

$$\begin{array}{cccc} \text{sin} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & sin(x) \end{array}$$

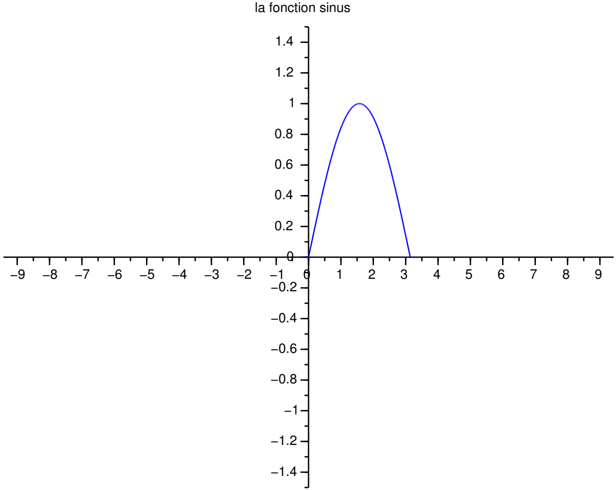
Proposition

La fonction sinus est

1. *impaire :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$;
2. *périodique de période* 2π *:* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$;
3. *continue sur* $\mathbb{R}$;
4. *dérivable et* $\forall x \in \mathbb{R}$, $sin'(x) = cos(x)$.

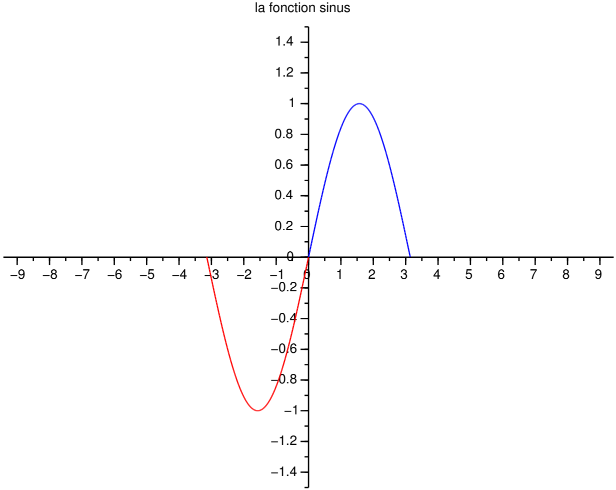
Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Représentation graphique



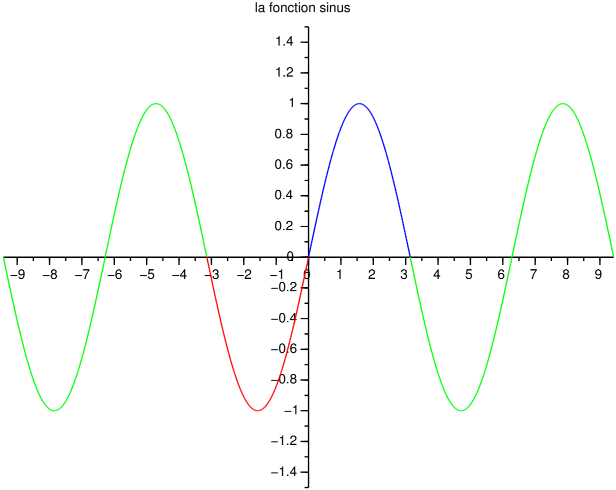
Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Représentation graphique



Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Représentation graphique



on peut également définir une fonction cosinus qui à un nombre réel associe son cosinus.

$$\begin{array}{cccc} \text{cos} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & cos(x) \end{array}$$

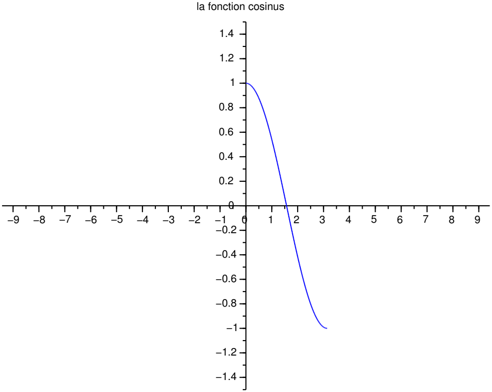
Proposition

En utilisant que $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ *et que* $\sin(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ *on obtient que la fonction cosinus est*

1. *paire :* $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$ *;*
2. *périodique de période* 2π *:* $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ *;*
3. *continue sur* $\mathbb{R}$ *;*
4. *dérivable et* $\forall x \in \mathbb{R}, cos'(x) = -sin(x)$.

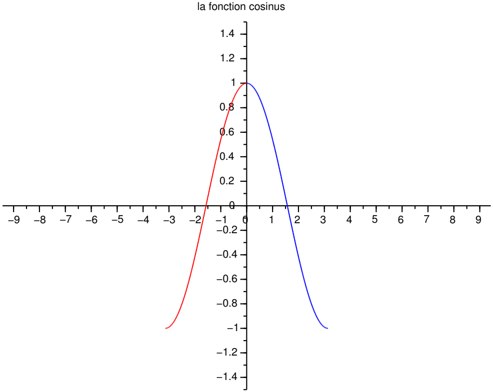
Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Représentation graphique



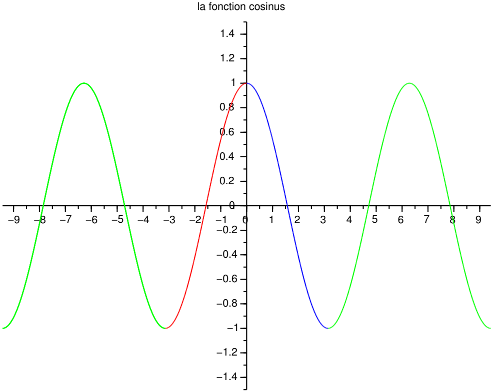
Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Représentation graphique



Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Représentation graphique



Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Notion de bijection

Définition : Soit I et J deux intervalles. On dit qu'une application $f : I \to J$ est une bijection s'il existe une fonction $g : J \to I$ telle que

$$\forall x \in I, g(f(x)) = x$$
$$\forall y \in J, f(g(y)) = y$$

Dans ce cas la fonction g est unique, s'appelle l'inverse de f et se note f^{-1}. On a alors $\forall x \in I, \forall y \in J$,

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

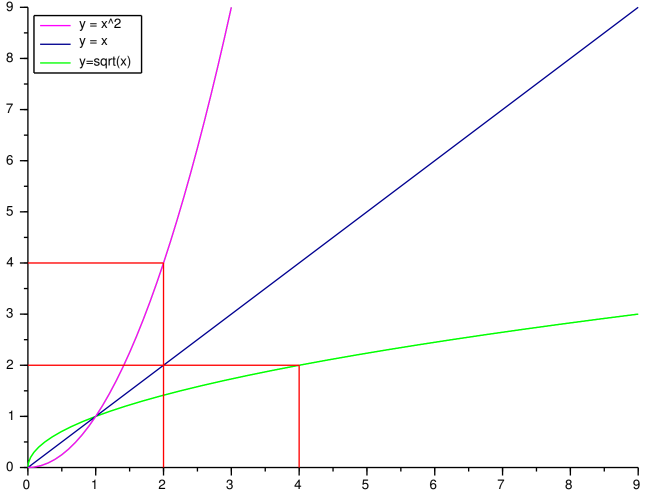
Exemple

La fonction $f : [0,3[\to [0,9[, x \mapsto x^2$ est une bijection dont l'inverse est la fonction $\sqrt{\ }: [0,9[\to [0,3[$. Ainsi on a $\sqrt{4} = 2$ puisque $2^2 = 4$.

Graphiquement, la représentation de l'inverse s'obtient en faisant la symétrie par rapport à la droite $y = x$.

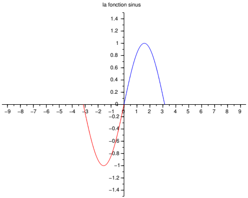
Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Notion de bijection : un exemple



Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

La fonction Arcsinus

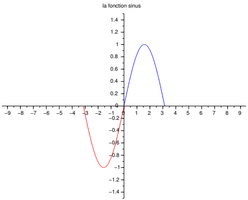


La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
C'est donc une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur son image, qui est $[-1, 1]$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto \sin(t)$ restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$ possède une fonction inverse

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

La fonction Arcsinus

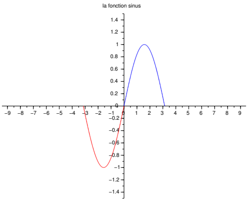


La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
C'est donc une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur son image, qui est $[-1, 1]$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto \sin(t)$ restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$ possède une fonction inverse

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

La fonction Arcsinus



La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
C'est donc une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur son image, qui est $[-1, 1]$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto \sin(t)$ restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$ possède une fonction inverse

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Propriété de la fonction Arcsinus

La fonction arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue sur $[-1,1]$, elle vérifie que :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$;
2. $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$x = \sin(y) \iff y = \arcsin(x)$$

Attention : $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$ puisque $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$. On a $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \pi/2$; $\arcsin(1/2) = \pi/6$; $\arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ et $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

De plus arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. (on remarquera que l'intervalle est ouvert) et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette formule est une conséquence de la formule générale de dérivation d'une fonction inverse et de la relation $(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$. La fonction arcsin est donc strictement croissante.

Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Propriété de la fonction Arcsinus

La fonction arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue sur $[-1,1]$, elle vérifie que :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$;
2. $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$x = \sin(y) \iff y = \arcsin(x)$$

Attention : $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$ puisque $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$. On a $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \pi/2$; $\arcsin(1/2) = \pi/6$; $\arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ et $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

De plus arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. (on remarquera que l'intervalle est ouvert) et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette formule est une conséquence de la formule générale de dérivation d'une fonction inverse et de la relation $(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$. La fonction arcsin est donc strictement croissante.

Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Propriété de la fonction Arcsinus

La fonction arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue sur $[-1,1]$, elle vérifie que :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$;
2. $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$x = \sin(y) \iff y = \arcsin(x)$$

Attention : $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$ puisque $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$. On a $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \pi/2$; $\arcsin(1/2) = \pi/6$; $\arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ et $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

De plus arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. (on remarquera que l'intervalle est ouvert) et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette formule est une conséquence de la formule générale de dérivation d'une fonction inverse et de la relation $(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$. La fonction arcsin est donc strictement croissante.

Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Propriété de la fonction Arcsinus

La fonction arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue sur $[-1,1]$, elle vérifie que :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$;
2. $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$x = \sin(y) \iff y = \arcsin(x)$$

Attention : $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$ puisque $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$. On a $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \pi/2$; $\arcsin(1/2) = \pi/6$; $\arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ et $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

De plus arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. (on remarquera que l'intervalle est ouvert) et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette formule est une conséquence de la formule générale de dérivation d'une fonction inverse et de la relation $(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$. La fonction arcsin est donc strictement croissante.

Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Propriété de la fonction Arcsinus

La fonction arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue sur $[-1,1]$, elle vérifie que :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$;
2. $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$x = \sin(y) \iff y = \arcsin(x)$$

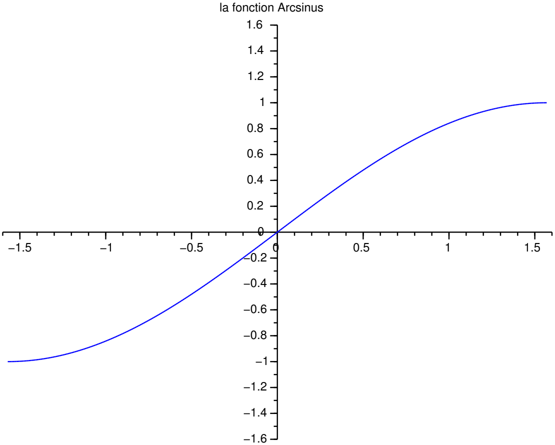
Attention : $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$ puisque $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$. On a $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \pi/2$; $\arcsin(1/2) = \pi/6$; $\arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ et $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.
De plus arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. (on remarquera que l'intervalle est ouvert) et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette formule est une conséquence de la formule générale de dérivation d'une fonction inverse et de la relation $(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$. La fonction arcsin est donc strictement croissante.

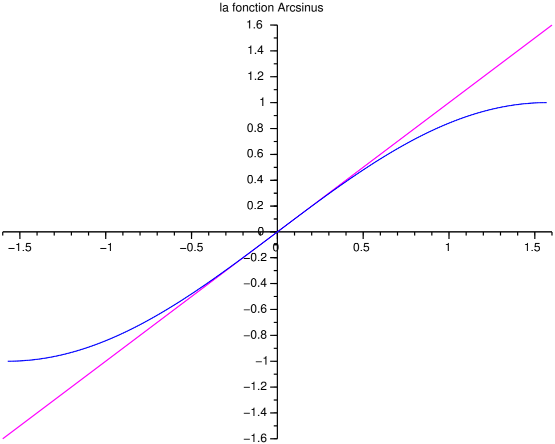
Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

La fonction Arcsinus : représentation graphique



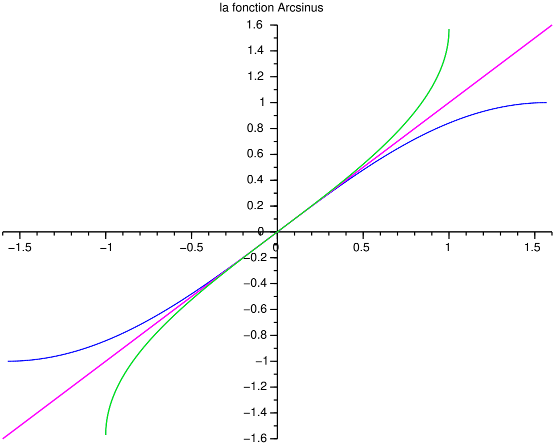
Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

La fonction Arcsinus : représentation graphique



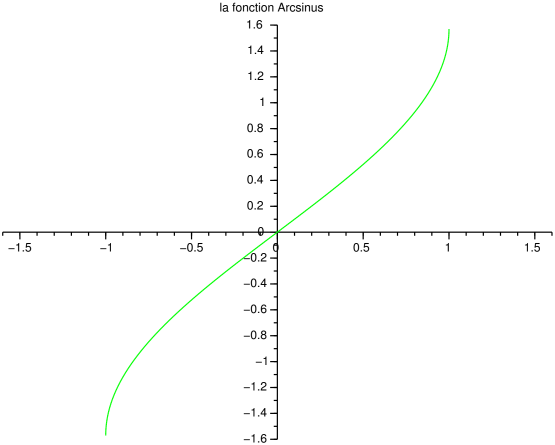
Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

La fonction Arcsinus : représentation graphique



Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

La fonction Arcsinus : représentation graphique

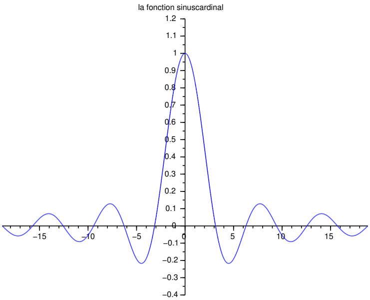


Du cercle trigonométrique à la fonction sinus

Une autre fonction : la fonction sinus cardinal

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{sinc} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

La fonction *sinc* est continue et dérivable. Elle apparait dans l'étude de nombreux domaines de la physique.



Les autres fonctions classiques

La fonction tangente : définition et propriétés

On a

$$\cos(x) = 0 \iff x = \pi/2 + k \times \pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

On peut donc définir la fonction tangente ainsi :

$$\tan : \begin{array}{rcl} D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k \times \pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Des propriétés vues ci-dessus pour les fonctions cos et sin on déduit que :

Proposition

La fonction tan *est :*

1. *impaire :* $\forall x \in D_{\tan}$, $\tan(-x) = -\tan(x)$ *; en effet* $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.
2. *périodique de période* π *:* $\forall x \in D_{\tan}$, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ *; en effet* $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.
3. *continue sur* $D_{\tan}$ *;*

Les autres fonctions classiques

La fonction tangente : définition et propriétés (suite)

Proposition

La fonction tan *est dérivable et* $\forall x \in D_{\tan}$,

$$\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

En effet :

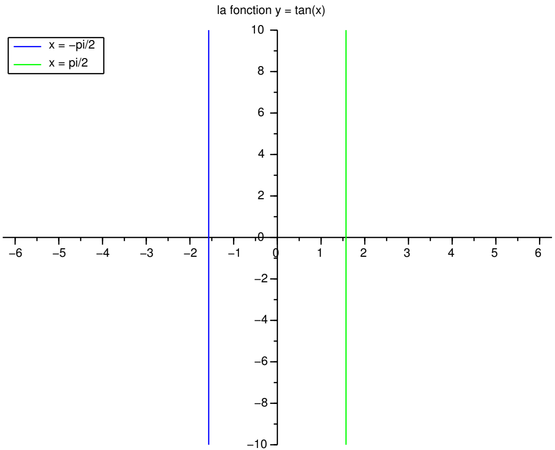
$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\times\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} =$
$\frac{1}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + (\tan(x))^2.$

On en déduit que la fonction tan est strictement croissante sur $]-pi/2, pi/2[$.

Rappel : $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

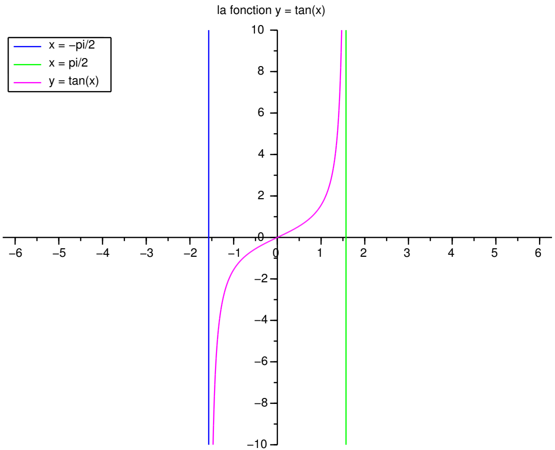
Les autres fonctions classiques

La fonction tangente : représentation



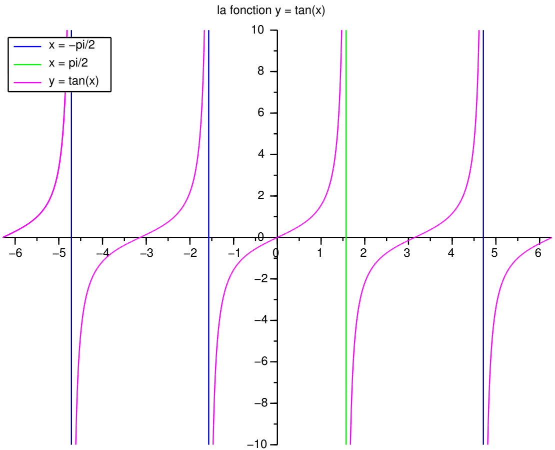
Les autres fonctions classiques

La fonction tangente : représentation



Les autres fonctions classiques

La fonction tangente : représentation



Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
C'est donc une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto \tan(t)$ restreinte à $]-\pi/2, \pi/2[$ possède une fonction inverse

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[.$$

La fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est continue et elle vérifie que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$;
2. $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \arctan(\tan(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-\pi/2, \pi/2[,$

$$x = \tan(y) \iff y = \tan(x)$$

Attention : $\arctan(tan(\pi)) = 0$ puisque $\tan(0) = 0 = \tan(\pi)$. On a $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \pi/4$ et $\arctan(-1) = -pi/4$.
De plus arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$.
C'est donc une bijection de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto \tan(t)$ restreinte à $]-\pi/2,\pi/2[$ possède une fonction inverse

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2,\pi/2[.$$

La fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2,\pi/2[$ est continue et elle vérifie que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$;
2. $\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\arctan(\tan(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]-\pi/2,\pi/2[$,

$$x = \tan(y) \iff y = \tan(x)$$

Attention : $\arctan(tan(\pi)) = 0$ puisque $\tan(0) = 0 = \tan(\pi)$. On a $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \pi/4$ et $\arctan(-1) = -pi/4$.
De plus arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
C'est donc une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto \tan(t)$ restreinte à $]-\pi/2, \pi/2[$ possède une fonction inverse

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[.$$

La fonction arctan : $\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est continue et elle vérifie que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$;
2. $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\arctan(\tan(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$x = \tan(y) \iff y = \tan(x)$$

Attention : $\arctan(tan(\pi)) = 0$ puisque $\tan(0) = 0 = \tan(\pi)$. On a $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \pi/4$ et $\arctan(-1) = -pi/4$.
De plus arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
C'est donc une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto \tan(t)$ restreinte à $]-\pi/2, \pi/2[$ possède une fonction inverse

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[.$$

La fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est continue et elle vérifie que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$;
2. $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\arctan(\tan(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$x = \tan(y) \iff y = \tan(x)$$

Attention : $\arctan(tan(\pi)) = 0$ puisque $\tan(0) = 0 = \tan(\pi)$. On a $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \pi/4$ et $\arctan(-1) = -pi/4$.

De plus arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
C'est donc une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto \tan(t)$ restreinte à $]-\pi/2, \pi/2[$ possède une fonction inverse

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[.$$

La fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est continue et elle vérifie que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$;
2. $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \arctan(\tan(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-\pi/2, \pi/2[,$

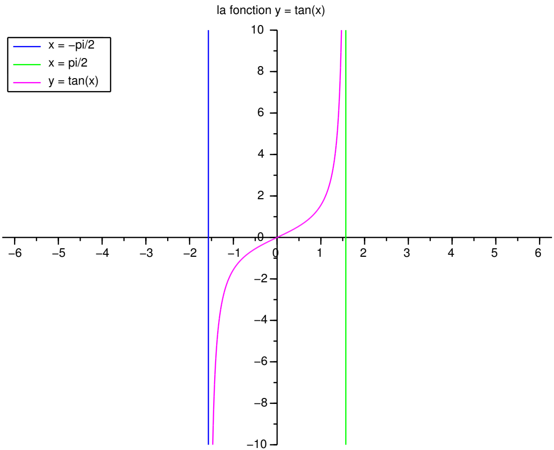
$$x = \tan(y) \iff y = \tan(x)$$

Attention : $\arctan(tan(\pi)) = 0$ puisque $\tan(0) = 0 = \tan(\pi)$. On a $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \pi/4$ et $\arctan(-1) = -pi/4$.
De plus arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

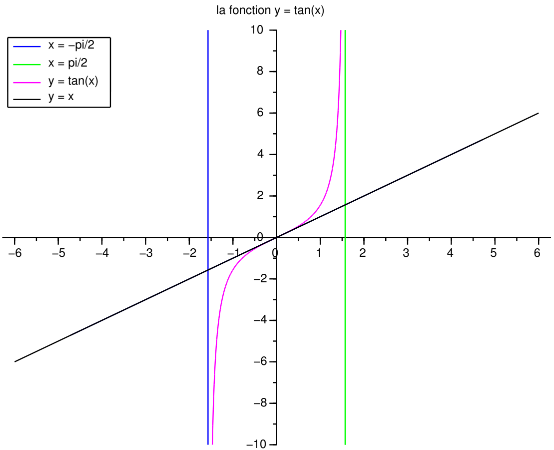
Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : représentation



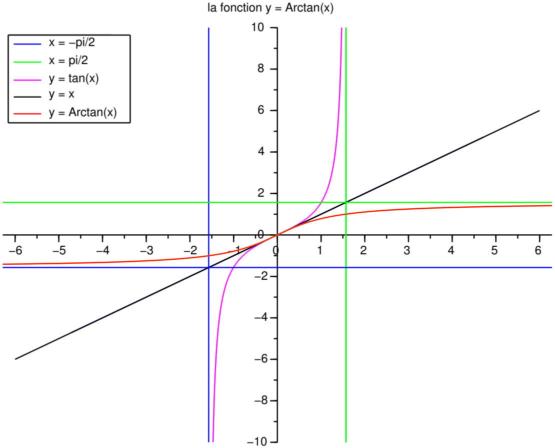
Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : représentation



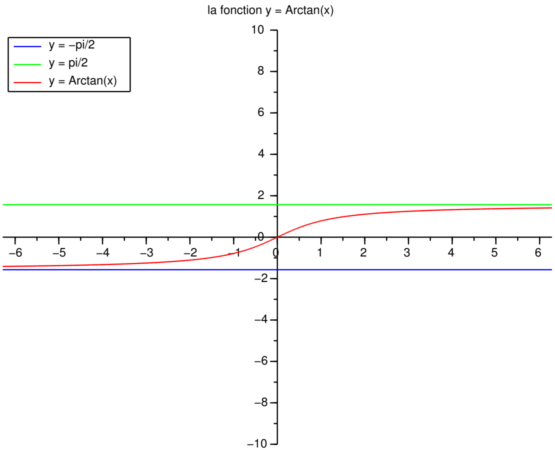
Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : représentation



Les autres fonctions classiques

La fonction Arc-tangente : représentation



Les autres fonctions classiques

Rappel sur la notion de primitive

Definition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une autre application. On dit que F est une primitive de f si la fonction F est dérivable sur I et que

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Proposition

Toute fonction continue possède des primitives.

Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si $F_1 : I \to \mathbb{R}$ et $F_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux primitives de f alors F_1 et F_2 diffèrent d'une constante :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F_2(x) = F_1(x) + C$$

Il existe C dans $\mathbb{R}$ tel que pour tous x dans I, on a $F_2(x) = F_1(x) + C$

Les autres fonctions classiques

Rappel sur la notion de primitive

Exemple

La primitive F telle que $F(1) = -2$ de la fonction $f : x \mapsto f(x) = 3x^2 + 2$ est l'application $F(x) = x^3 + 2x - 5$. en effet. Si $F_2(x) = x^3 + 2x$ alors $F_2'(x) = f(x)$ donc il existe une constante C telle que $F(x) = F_2(x) + C$. On veut $-2 = F_2(1) + C = 3 + C$. Donc $C = -5$.

Une conséquence est la proposition suivante :

Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application qui possède des primitives. Soit a dans I et b dans $\mathbb{R}$. Alors l'application f possède une unique primitive F qui vérifie $F(a) = b$.

Exemple

L'unique primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ qui vérifie $F(0) = 0$ est la fonction $F(t) = \int_0^t f(u)du$.

Les autres fonctions classiques

Rappel sur la notion de primitive

Exemple

La primitive F telle que $F(1) = -2$ de la fonction $f : x \mapsto f(x) = 3x^2 + 2$ est l'application $F(x) = x^3 + 2x - 5$. en effet. Si $F_2(x) = x^3 + 2x$ alors $F_2'(x) = f(x)$ donc il existe une constante C telle que $F(x) = F_2(x) + C$. On veut $-2 = F_2(1) + C = 3 + C$. Donc $C = -5$.

Une conséquence est la proposition suivante :

Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application qui possède des primitives. Soit a dans I et b dans $\mathbb{R}$. Alors l'application f possède une unique primitive F qui vérifie $F(a) = b$.

Exemple

L'unique primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ qui vérifie $F(0) = 0$ est la fonction $F(t) = \int_0^t f(u)du$.

Les autres fonctions classiques

Rappel sur la notion de primitive

Exemple

La primitive F telle que $F(1) = -2$ de la fonction $f : x \mapsto f(x) = 3x^2 + 2$ est l'application $F(x) = x^3 + 2x - 5$. en effet. Si $F_2(x) = x^3 + 2x$ alors $F_2'(x) = f(x)$ donc il existe une constante C telle que $F(x) = F_2(x) + C$. On veut $-2 = F_2(1) + C = 3 + C$. Donc $C = -5$.

Une conséquence est la proposition suivante :

Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application qui possède des primitives. Soit a dans I et b dans $\mathbb{R}$. Alors l'application f possède une unique primitive F qui vérifie $F(a) = b$.

Exemple

L'unique primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ qui vérifie $F(0) = 0$ est la fonction $F(t) = \int_0^t f(u)du$.

Les autres fonctions classiques

La fonction logarithme neperien : definition

Fait : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle possède donc des primitives.
Definition : On appelle logarithme neperien l'unique primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui vaut 0 en 1. On la note *Ln*. Cette fonction est donc cacatérisée par les deux propriétés

$$Ln(1) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, Ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

On a donc pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$,

$$Ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} du$$

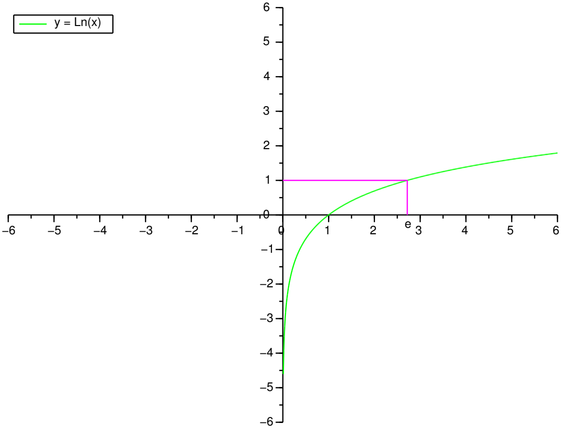
Proposition

1. *La fonction Ln est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *puisque* $Ln'(x) = \frac{1}{x} \geq 0$.
2. *La fonction Ln est continue sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *puisque dérivable.*
3. *Pour tout* a, b *dans* $\mathbb{R}^{+*}$ *on a* $Ln(ab) = Ln(a) + Ln(b)$.
4. *Pour tout nombre réel strictement positif a on a* $Ln(a^n) = n \times Ln(a)$

Prouvons l'avant-dernier résultat (le dernier en est une conséquence facile) :
Soit a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ et considerons l'application F_a définie par $F_a(x) = Lb(ax)$.
Alors l'application F_a est dérivable et $F_a'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. Donc il existe C tel que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $F_a(x) = C + Ln(x)$. Par conséquent,
$F_b(1) = Ln(a) = Ln(1) + C = C$. Donc pour $x = b$, $Ln(ab) = Ln(a) + Ln(b)$.
□ Rappel : $(u \circ v)(x) = u(v(x))$ et $(u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x)$.

Les autres fonctions classiques

La fonction logarithme neperien : représentation



Les autres fonctions classiques

La fonction logarithme décimal : definition et propriétés

Definition : On appelle **logarithme décimal** La fonction Log définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$Log(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(10)}$$

1. Elle est donc continue, strictement croissante ;
2. dérivable, avec $Log'(x) = \frac{1}{Ln(10) \times x}$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$;
3. Pour tout a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ on a $Log(ab) = Log(a) + Log(b)$.
4. Pour tout nombre réel strictement positif a on a $Log(a^n) = n \times Log(a)$;
5. Pour tout entier positif $Log(10^n) = n$.

Les autres fonctions classiques

La fonction logarithme décimal : definition et propriétés

Definition : On appelle **logarithme décimal** La fonction Log définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$Log(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(10)}$$

1. Elle est donc continue, strictement croissante ;
2. dérivable, avec $Log'(x) = \frac{1}{Ln(10) \times x}$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$;
3. Pour tout a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ on a $Log(ab) = Log(a) + Log(b)$.
4. Pour tout nombre réel strictement positif a on a $Log(a^n) = n \times Log(a)$;
5. Pour tout entier positif $Log(10^n) = n$.

Les autres fonctions classiques

La fonction logarithme décimal : definition et propriétés

Definition : On appelle logarithme décimal La fonction Log définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$Log(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(10)}$$

1. Elle est donc continue, strictement croissante ;
2. dérivable, avec $Log'(x) = \frac{1}{Ln(10)\times x}$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$;
3. Pour tout a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ on a $Log(ab) = Log(a) + Log(b)$.
4. Pour tout nombre réel strictement positif a on a $Log(a^n) = n \times Log(a)$;
5. Pour tout entier positif $Log(10^n) = n$.

Les autres fonctions classiques

La fonction logarithme décimal : definition et propriétés

Definition : On appelle **logarithme décimal** La fonction Log définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$Log(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(10)}$$

1. Elle est donc continue, strictement croissante ;
2. dérivable, avec $Log'(x) = \frac{1}{Ln(10) \times x}$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$;
3. Pour tout a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ on a $Log(ab) = Log(a) + Log(b)$.
4. Pour tout nombre réel strictement positif a on a $Log(a^n) = n \times Log(a)$;
5. Pour tout entier positif $Log(10^n) = n$.

Les autres fonctions classiques

La fonction logarithme décimal : definition et propriétés

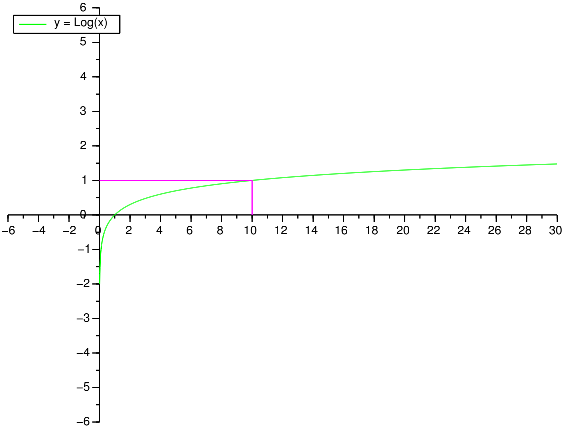
Definition : On appelle logarithme décimal La fonction Log définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$Log(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(10)}$$

1. Elle est donc continue, strictement croissante ;
2. dérivable, avec $Log'(x) = \frac{1}{Ln(10) \times x}$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{+*}$;
3. Pour tout a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ on a $Log(ab) = Log(a) + Log(b)$.
4. Pour tout nombre réel strictement positif a on a $Log(a^n) = n \times Log(a)$;
5. Pour tout entier positif $Log(10^n) = n$.

Les autres fonctions classiques

La fonction logarithme décimal : représentation



Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto Ln(t)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.

De ce fait, la fonction $t \mapsto ln(t)$ possède une fonction inverse

$$Exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$$

Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle. Elle vérifie :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $Exp(Ln(x)) = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ln(Exp(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$x = Ln(y) \iff y = Exp(x)$$

On a $Exp(0) = 1$ puisque $Ln(1) = 0$.
De plus Exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$Exp'(x) = Exp(x).$$

La fonction Exp est donc strictement croissante.

Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto Ln(t)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto ln(t)$ possède une fonction inverse

$$Exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$$

Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle. Elle vérifie :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $Exp(Ln(x)) = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ln(Exp(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$x = Ln(y) \iff y = Exp(x)$$

On a $Exp(0) = 1$ puisque $Ln(1) = 0$.
De plus Exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$Exp'(x) = Exp(x).$$

La fonction Exp est donc strictement croissante.

Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto Ln(t)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto ln(t)$ possède une fonction inverse

$$Exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$$

Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle. Elle vérifie :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $Exp(Ln(x)) = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ln(Exp(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$x = Ln(y) \iff y = Exp(x)$$

On a $Exp(0) = 1$ puisque $Ln(1) = 0$.
De plus Exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$Exp'(x) = Exp(x).$$

La fonction Exp est donc strictement croissante.

Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto Ln(t)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto ln(t)$ possède une fonction inverse

$$Exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$$

Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle. Elle vérifie :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, Exp(Ln(x)) = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, Ln(Exp(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$x = Ln(y) \iff y = Exp(x)$$

On a $Exp(0) = 1$ puisque $Ln(1) = 0$.
De plus Exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$Exp'(x) = Exp(x).$$

La fonction Exp est donc strictement croissante.

Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : definition et propriétés

La fonction $t \mapsto Ln(t)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur son image, qui est $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $t \mapsto ln(t)$ possède une fonction inverse

$$Exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$$

Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle. Elle vérifie :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $Exp(Ln(x)) = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ln(Exp(x)) = x$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$x = Ln(y) \iff y = Exp(x)$$

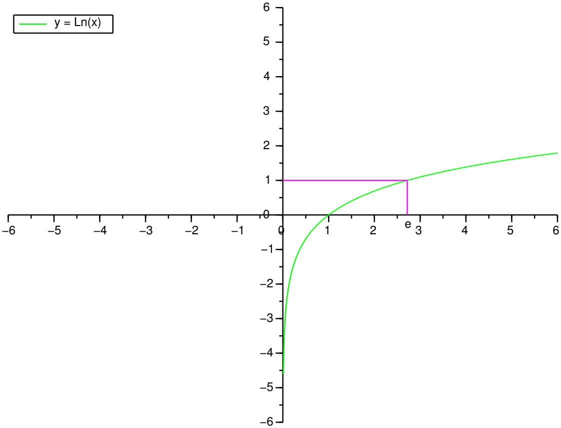
On a $Exp(0) = 1$ puisque $Ln(1) = 0$.
De plus Exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$Exp'(x) = Exp(x).$$

La fonction Exp est donc strictement croissante.

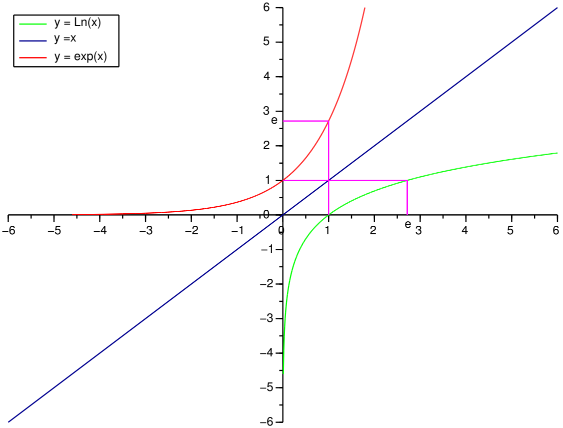
Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : représentation



Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : représentation



Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : définition et propriétés

On a de plus

1. pour tous nombres a et b, on a
$$Exp(a+b) = Exp(a)Exp(b)$$
2. pour tout nombre a et tout entier relatif n, on a
$$Exp(na) = (Exp(a))^n$$

De ce qui précède il découle que si n est un entier et a un nombre réel alors $Exp(n \times Ln(a)) = Exp(Ln(a^n)) = a^n$.

Définition : Soit a un nombre réel strictement positif et b un nombre réel quelconque. On pose
$$a^b = Exp(b \times Ln(a))$$

On a de plus

1. pour tous nombres a et b, on a

$$Exp(a+b) = Exp(a)Exp(b)$$

2. pour tout nombre a et tout entier relatif n, on a

$$Exp(na) = (Exp(a))^n$$

De ce qui précède il découle que si n est un entier et a un nombre réel alors $Exp(n \times Ln(a)) = Exp(Ln(a^n)) = a^n$.

Définition : Soit a un nombre réel strictement positif et b un nombre réel quelconque. On pose

$$a^b = Exp(b \times Ln(a))$$

Les autres fonctions classiques

La fonction exponentielle : définition et propriétés

On peut voir facilement que les propriétés suivantes sont vérifées pour a, c des nombres réels strictement positifs et b, d des nombres réels quelconques :

$$a^b a^d = a^{bd} \text{ et } a^b \times a^d = a^{b+d}$$

Enfin, Ln étant strictement croissant, il existe un unique nombre réel positif, noté e, vérifiant $Ln(e) = 1$. Avec la notation précédente, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ Exp(x) = e^x$$

On peut voir facilement que les propriétés suivantes sont vérifées pour a, c des nombres réels strictement positifs et b, d des nombres réels quelconques :

$$a^b a^d = a^{bd} \text{ et } a^b \times a^d = a^{b+d}$$

Enfin, Ln étant strictement croissant, il existe un unique nombre réel positif, noté e, vérifiant $Ln(e) = 1$. Avec la notation précédente, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Exp(x) = e^x$$

Definition : On appelle fonction harmonique toute fonction (tout signal) de la forme $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $S(t) = Asin(\omega t + \phi)$ avec $A > 0$ et $\omega > 0$.

1. Le nombre A s'appelle l'amplitude de S.
2. Le nombre ω s'appelle la pulsation de S.
3. Le nombre ϕ s'appelle la phase de S. Celui n'est défini qu'à 2pi près.
4. Le nombre $f = \frac{\omega}{2pi}$ s'appelle la fréquence de S.

Proposition

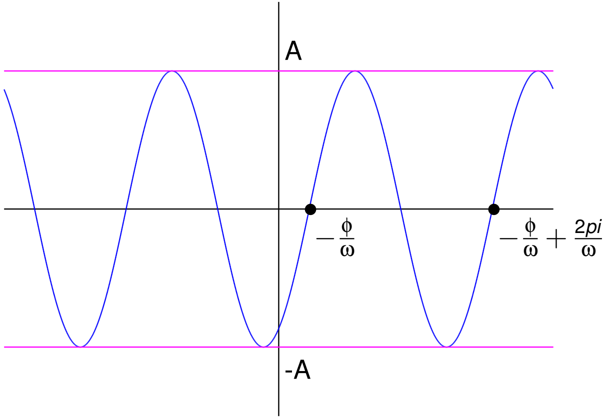
Le signal $S(t) = Asin(\omega t + \phi)$ est périodique et la période de S est

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2pi}{\omega}$$

Fonctions harmoniques

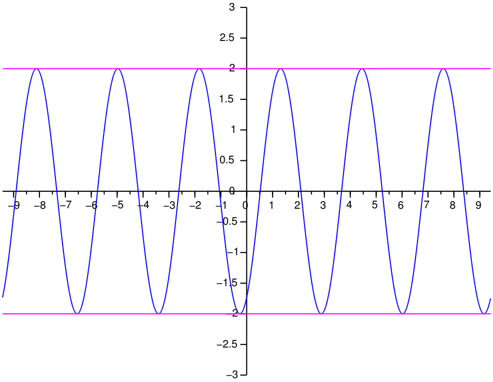
Représentation graphique

La fonction harmonique $S(t) = A\sin(\omega t + \phi)$



Fonctions harmoniques

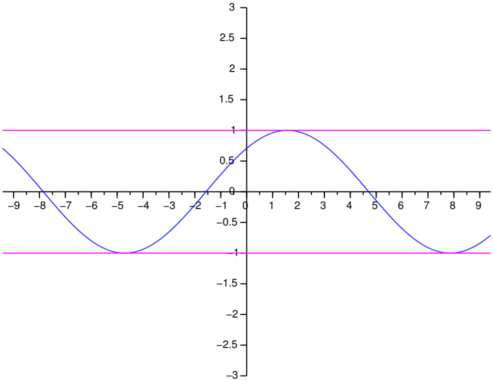
Exemple 1



La fonction harmonique $S(t) = 2\sin(2t - \frac{pi}{3})$. On a : $A = 2$, $\omega = 2$, $\phi = -\frac{pi}{3}$ et $T = \frac{2pi}{2} = \pi$.

Fonctions harmoniques

Exemple 2

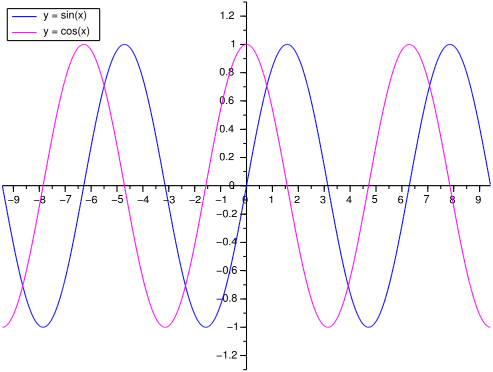


La fonction harmonique $S(t) = \sin(\frac{1}{2}t + \frac{pi}{4})$. On a :
$A = 1$, $\omega = \frac{1}{2}$, $\phi = \frac{pi}{4}$ et $T = 4\pi$.

Fonctions harmoniques

Exemple 3

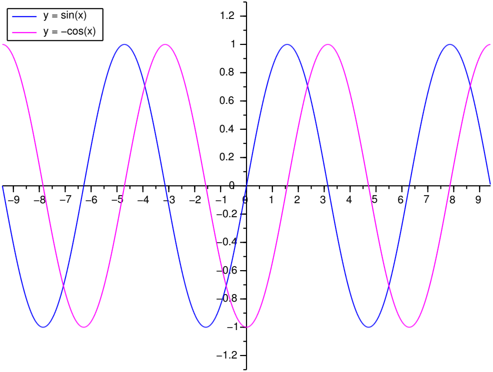
$$\cos(\omega t) = sin(\omega t + \frac{pi}{2})$$



Fonctions harmoniques

Exemple 4

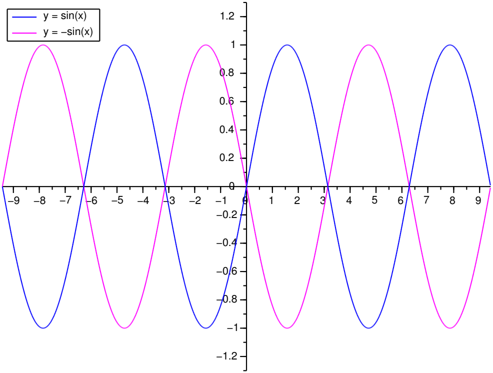
$$-cos(\omega t) = sin(\omega t - \frac{pi}{2})$$



Fonctions harmoniques

Exemple 5

$$-sin(\omega t) = sin(\omega t + \pi)$$



Fonctions harmoniques

Décalage dans le temps : Avance/Retard

On peut vouloir comparer le décalage dans le temps entre plusieurs signaux harmoniques de même pulsation.

Pour cela il faut fixer une convention pour comparer les phases sur une période de largeur 2π.

Dans ce cours, par convention pour comparer plusieurs signaux, on placera toutes les phases dans $]-pi, pi]$.

Supposons que l'on a deux signaux $S_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$ et $S_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$. On dira que

1. S_1 est en avance sur S_2 si $\phi_1 - \phi_2 > 0$. Le nombre $\phi_1 - \phi_2$ s'appelle alors l'avance de phase de ϕ_1 sur ϕ_2.
2. S_1 est en retard sur S_2 si $\phi_1 - \phi_2 < 0$. e nombre $\phi_1 - \phi_2$ s'appelle alors le retard de phase de ϕ_1 sur ϕ_2.
3. S_1 est en phase avec S_2 si $\phi_1 = \phi_2$.

Fonctions harmoniques

Décalage dans le temps : Avance/Retard

On peut vouloir comparer le décalage dans le temps entre plusieurs signaux harmoniques de même pulsation.
Pour cela il faut fixer une convention pour comparer les phases sur une période de largeur 2π.
<u>Dans ce cours</u>, par convention pour comparer plusieurs signaux, on placera toutes les phases dans $]-pi, pi]$.
Supposons que l'on a deux signaux $S_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$ et $S_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$. On dira que

1. S_1 est en avance sur S_2 si $\phi_1 - \phi_2 > 0$. Le nombre $\phi_1 - \phi_2$ s'appelle alors l'avance de phase de ϕ_1 sur ϕ_2.
2. S_1 est en retard sur S_2 si $\phi_1 - \phi_2 < 0$. e nombre $\phi_1 - \phi_2$ s'appelle alors le retard de phase de ϕ_1 sur ϕ_2.
3. S_1 est en phase avec S_2 si $\phi_1 = \phi_2$.

Fonctions harmoniques

Décalage dans le temps : Avance/Retard

On peut vouloir comparer le décalage dans le temps entre plusieurs signaux harmoniques de même pulsation.

Pour cela il faut fixer une convention pour comparer les phases sur une période de largeur 2π.

<u>Dans ce cours</u>, par convention pour comparer plusieurs signaux, on placera toutes les phases dans $]-pi, pi]$.

Supposons que l'on a deux signaux $S_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$ et $S_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$. On dira que

1. S_1 est en avance sur S_2 si $\phi_1 - \phi_2 > 0$. Le nombre $\phi_1 - \phi_2$ s'appelle alors l'avance de phase de ϕ_1 sur ϕ_2.
2. S_1 est en retard sur S_2 si $\phi_1 - \phi_2 < 0$. e nombre $\phi_1 - \phi_2$ s'appelle alors le retard de phase de ϕ_1 sur ϕ_2.
3. S_1 est en phase avec S_2 si $\phi_1 = \phi_2$.

Fonctions harmoniques

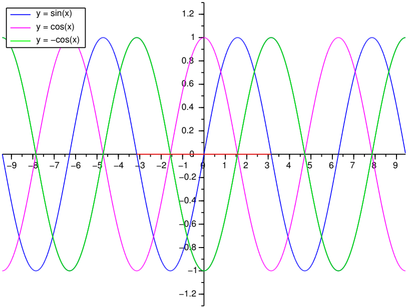
Décalage dans le temps : Avance/Retard

On peut vouloir comparer le décalage dans le temps entre plusieurs signaux harmoniques de même pulsation.
Pour cela il faut fixer une convention pour comparer les phases sur une période de largeur 2π.
Dans ce cours, par convention pour comparer plusieurs signaux, on placera toutes les phases dans $]-pi, pi]$.
Supposons que l'on a deux signaux $S_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$ et $S_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$. On dira que

1. S_1 est en avance sur S_2 si $\phi_1 - \phi_2 > 0$. Le nombre $\phi_1 - \phi_2$ s'appelle alors l'avance de phase de ϕ_1 sur ϕ_2.
2. S_1 est en retard sur S_2 si $\phi_1 - \phi_2 < 0$. e nombre $\phi_1 - \phi_2$ s'appelle alors le retard de phase de ϕ_1 sur ϕ_2.
3. S_1 est en phase avec S_2 si $\phi_1 = \phi_2$.

Fonctions harmoniques

Décalage dans le temps : exemple



1. La fonction $S_1 : t \mapsto sin(t)$ a un retard de phase de $\frac{pi}{2}$ sur la fonction $S_2 : t \mapsto cos(t) = sin(t + pi/2)$ car $\phi_1 - \phi_2 = 0 - \frac{pi}{2} = -\frac{pi}{2} < 0$.
2. La fonction $S_1 : t \mapsto sin(t)$ a une avance de phase de $\frac{pi}{2}$ sur la fonction $S_2 : t \mapsto -cos(t) = sin(t - pi/2)$ car $\phi_1 - \phi_2 = 0 - (-\frac{pi}{2}) = \frac{pi}{2} > 0$.

Fonctions harmoniques

Changement d'échelle Dilatation/Compression

Definition Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit ω un nombre positif non nul et différent de 1. soit $S_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$S_\omega(t) = S(\omega t)$$

1. Si $\omega > 1$ on dit que S_ω est une compression de S et ω s'appelle le facteur de compression.
2. Si $\omega < 1$ on dit que S_ω est une dilatation de S et ω s'appelle le facteur de dilatation.

Proposition

Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T alors S_ω est une fonction périodique de période $\frac{T}{\omega}$

Remarque

Si $\omega > 1$ alors S_ω oscille plus vite que S, mais si $\omega < 1$ alors S_ω oscille moins vite que S.

Fonctions harmoniques

Changement d'échelle Dilatation/Compression

Definition Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit ω un nombre positif non nul et différent de 1. soit $S_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$S_\omega(t) = S(\omega t)$$

1. Si $\omega > 1$ on dit que S_ω est une compression de S et ω s'appelle le facteur de compression.
2. Si $\omega < 1$ on dit que S_ω est une dilatation de S et ω s'appelle le facteur de dilatation.

Proposition

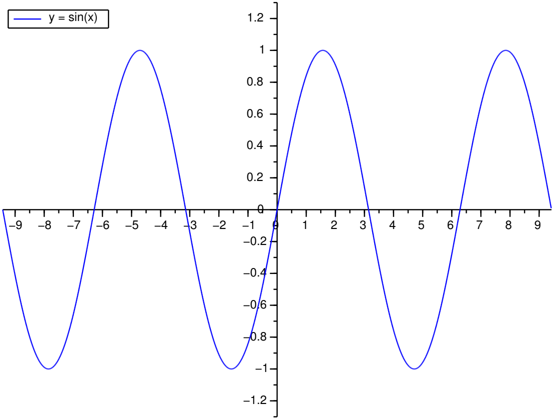
Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T alors S_ω est une fonction périodique de période $\frac{T}{\omega}$

Remarque

Si $\omega > 1$ alors S_ω oscille plus vite que S, mais si $\omega < 1$ alors S_ω oscille moins vite que S.

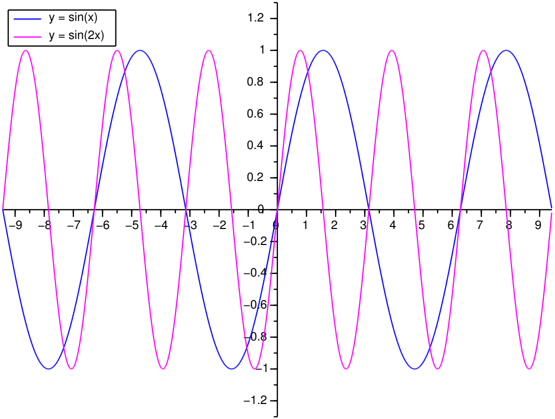
Fonctions harmoniques

Changement d'échelle : exemple



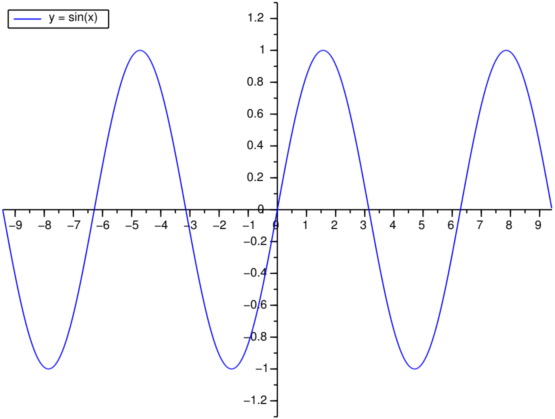
Fonctions harmoniques

Changement d'échelle : exemple



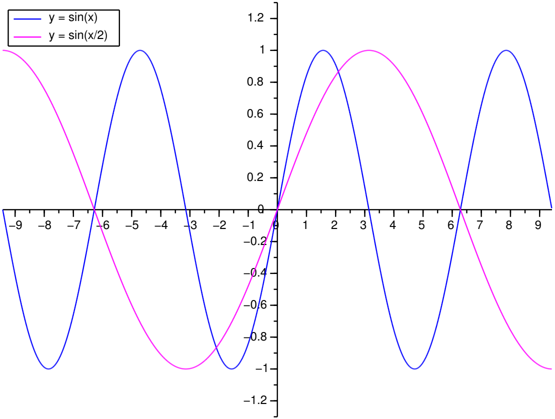
Fonctions harmoniques

Changement d'échelle : exemple



Fonctions harmoniques

Changement d'échelle : exemple



Fonctions harmoniques

Fonctions pseudo-harmoniques

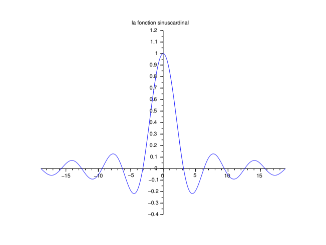
Définition On appelle fonction pseudo-harmonique toute fonction $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$S(t) = g(t)\sin(\omega t + \phi)$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.

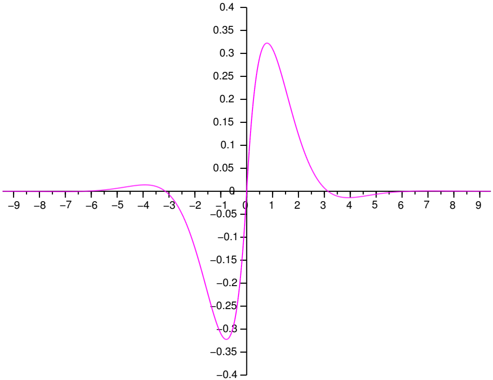
En général les fonctions g considérées tendent vers 0 à l'infini car ses fonctions traduisent des phénomènes physiques d'amortissement (du type phénomène dissipatif du à une résistance dans un circuit électronique)

Exemple ($S(t) = sinc(t) = \sin(t)/t$ avec $g(t) = \frac{1}{t}$)



.

Exemple ($S(t) = \exp(-|t|)\sin(t)$ avec $g(t) = \exp(-|t|)$)



.

Intégrales appliquées

Definition de l'intégrale, somme de Darboux

Notation : Soit $[a, b]$ un intervalle. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, une application bornée (il existe m, M dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout x dans $[a, b]$ on a $m < f(x) < M$) .

1. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie $\Delta = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ telle que $a_0 = a$ et $a_k = b$ avec $a_0 < a_1 < \ldots < a_k$.
2. Si $\Delta = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ est une subdivision de $[a, b]$. On appelle pas de δ le nombre $\max\{| a_{i+1} - a_i | ; i \in 0 \leq i \leq k-1\}$.
3. Si $\Delta = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ est une subdivision de $[a, b]$. Posons $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1}]\}$. On appelle somme de Darboux supérieure associée à f le nombre $D_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{k-1} M_i(a_{i+1} - a_i)$
4. Si $\Delta = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ est une subdivision de $[a, b]$. Posons $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1}]\}$. On appelle somme de Darboux inférieure associée à f le nombre $d_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(a_{i+1} - a_i)$
5. Si $\Delta = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ est une subdivision de $[a, b]$, alors $d_\Delta(f) \leq D_\Delta(f)$

Intégrales appliquées

Definition de l'intégrale

Définition Soit $[a, b]$ un intervalle. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, une application bornée. On dit que f est intégrable si

$$\inf\{d_\Delta(f) \mid \Delta \text{ subdivision de } [a,b]\} = \sup\{D_\Delta(f) \mid \Delta \text{ subdivision de } [a,b]\}$$

Dans ce cas, ce nombre s'appelle l'intégrale de f entre a et b et se note

$$\int_a^b f(t)dt$$

Exemple

Toute fonction continue sur un intervalle [a,b] est intégrable sur cet intervalle.

Exemple

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si t est dans $\mathbb{Q}$ et $f(t) = 1$ sinon. Alors pour toute subdivision Δ, on a $d_\Delta(f) = 0$ et $D_\Delta(f) = 1$. Donc f n'est pas intégrable.

Intégrales appliquées

Definition de l'intégrale

Définition Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, une application bornée. On dit que f est intégrable si

$$\inf\{d_\Delta(f) \mid \Delta \text{ subdivision de } [a,b]\} = \sup\{D_\Delta(f) \mid \Delta \text{ subdivision de } [a,b]\}$$

Dans ce cas, ce nombre s'appelle l'intégrale de f entre a et b et se note

$$\int_a^b f(t)dt$$

Exemple

Toute fonction continue sur un intervalle [a,b] est intégrable sur cet intervalle.

Exemple

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si t est dans $\mathbb{Q}$ et $f(t) = 1$ sinon. Alors pour toute subdivision Δ, on a $d_\Delta(f) = 0$ et $D_\Delta(f) = 1$. Donc f n'est pas intégrable.

Intégrales appliquées

Definition de l'intégrale

Définition Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}, x\mapsto f(x)$, une application bornée. On dit que f est intégrable si

$$\inf\{d_\Delta(f)\mid \Delta \text{ subdivision de } [a,b]\} = \sup\{D_\Delta(f)\mid \Delta \text{ subdivision de } [a,b]\}$$

Dans ce cas, ce nombre s'appelle l'intégrale de f entre a et b et se note

$$\int_a^b f(t)dt$$

Exemple

Toute fonction continue sur un intervalle [a,b] est intégrable sur cet intervalle.

Exemple

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=0$ si t est dans $\mathbb{Q}$ et $f(t)=1$ sinon. Alors pour toute subdivision Δ, on a $d_\Delta(f)=0$ et $D_\Delta(f)=1$. Donc f n'est pas intégrable.

Intégrales appliquées

Lien avec les primitives

Notation : Soit $[a, b]$ un intervalle. Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x)$, une application. On pose

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple

$[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$

Proposition

Soit $[a, b]$ un intervalle. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. *Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$*
2. *Soit c dans $[a, b]$. L'application $F_c : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ est pour tout x on a $F_c'(x) = f(x)$.*

Intégrales appliquées

Lien avec les primitives

Notation : Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $F:[a,b]\to\mathbb{R}, x\mapsto F(x)$, une application. On pose
$$[F(x)]_a^b = F(b)-F(a).$$

Exemple

$[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2})-\sin(0) = 1-0 = 1$

Proposition

Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. *Soit $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $F'(x)=f(x)$ pour tout x dans $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$*
2. *Soit c dans $[a,b]$. L'application $F_c:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par $F_c(x)=\int_c^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ est pour tout x on a $F_c'(x)=f(x)$.*

Notation : Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x)$, une application. On pose

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple

$[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$

Proposition

Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$*
2. *Soit c dans $[a,b]$. L'application $F_c : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ est pour tout x on a $F_c'(x) = f(x)$.*

Intégrales appliquées

Lien avec les primitives : exemples

Exemple

$$\int_1^2 \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Exemple

$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = ?$

On a $\left(\sqrt{t^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}} \times (2t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. *Donc*

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = [\sqrt{t^2+1}]_0^2 = \sqrt{5} - 1$$

Intégrales appliquées

Lien avec les primitives : exemples

Exemple

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Exemple

$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = ?$

On a $\left(\sqrt{t^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}} \times (2t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. *Donc*

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = [\sqrt{t^2+1}]_0^2 = \sqrt{5} - 1$$

Exemple

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Exemple

$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = ?$

On a $\left(\sqrt{t^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}} \times (2t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. *Donc*

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = [\sqrt{t^2+1}]_0^2 = \sqrt{5} - 1$$

Intégrales appliquées

Linéarité

Proposition

Soit $[a, b]$ *un intervalle. Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$. *Soit* α, β *deux nombres réels, alors la fonction* $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ *est intégrable sur* $[a, b]$ *et on a*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Exemple

$$\int_0^\pi 6t + 2\sin(t) dt = 3 \int_0^\pi 2t dt + 2 \int_0^\pi \sin(t) dt = 3 \times [t^2]_0^\pi + 2 \times [-\cos(t)]_0^\pi =$$

$$3 \times (\pi^2 - 0^2) + 2 \times (-\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 3\pi^2 + 4.$$

Intégrales appliquées

Linéarité

Proposition

Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Soit α,β deux nombres réels, alors la fonction $x\mapsto \alpha f(x)+\beta g(x)$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

Exemple

$$\int_0^{\pi} 6t+2\sin(t)dt = 3\int_0^{\pi} 2tdt+2\int_0^{\pi}\sin(t)dt = 3\times[t^2]_0^{\pi}+2\times[-\cos(t)]_0^{\pi} =$$
$$3\times(\pi^2-0^2)+2\times(-\cos(\pi)-(-\cos(0))=3\pi^2+4.$$

Proposition

Soit $[a,b]$ *un intervalle. Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable. Soit* c *dans* $[a,b]$*. Alors* f *est intégrable sur* $[a,c]$ *et sur* $[b,c]$ *et on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple

$$\int_{-1}^1 |\, t \,|\, dt = \int_{-1}^0 |\, t \,|\, dt + \int_0^1 |\, t \,|\, dt =$$

$$\int_{-1}^0 -tdt + \int_0^1 tdt = [-\frac{1}{2}t^2]_{-1}^0 + [\frac{1}{2}t^2]_0^1 = 1$$

Proposition

Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soit c dans $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[b,c]$ et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple

$$\int_{-1}^1 \mid t \mid dt = \int_{-1}^0 \mid t \mid dt + \int_0^1 \mid t \mid dt =$$

$$\int_{-1}^0 -tdt + \int_0^1 tdt = [-\frac{1}{2}t^2]_{-1}^0 + [\frac{1}{2}t^2]_0^1 = 1$$

Intégrales appliquées

Relation de Chasles

Proposition

Soit $[a,b]$ un intervalle. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soit c dans $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[b,c]$ et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple

$$\int_{-1}^1 \mid t \mid dt = \int_{-1}^0 \mid t \mid dt + \int_0^1 \mid t \mid dt =$$

$$\int_{-1}^0 -tdt + \int_0^1 tdt = [-\frac{1}{2}t^2]_{-1}^0 + [\frac{1}{2}t^2]_0^1 = 1$$

Intégrales appliquées

Valeur moyenne et valeur efficace

Definition Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T et intégrable sur tout intervalle.

1. On appelle valeur moyenne de S le nombre

$$V_{moy}(S) = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt$$

2. On appelle valeur efficace de S le nombre

$$V_{eff}(S) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T S^2(t)dt}$$

3. le carré de la valeur efficace s'appelle le puissance du signal.

Intégrales appliqués

Valeur moyenne et valeur efficace : exemple

Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(t)$. La période de S est 2π.

$$V_{moy}(\sin(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)dt = [-\frac{1}{2\pi}\cos(t)]_0^{2\pi} = 0.$$

$$V_{eff}(\sin(t)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin(t))^2dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1-\cos(2t)}{2})dt} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}]_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Intégrales appliqués

Valeur moyenne et valeur efficace : exemple

Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(t)$. La période de S est 2π.

$$V_{moy}(\sin(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)dt = [-\frac{1}{2\pi}\cos(t)]_0^{2\pi} = 0.$$

$$V_{eff}(\sin(t)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin(t))^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1-\cos(2t)}{2})dt} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}]_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Intégrales appliquées

Valeur moyenne et valeur efficace : propriétés

Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T et intégrable sur tout intervalle. Pour tout réel a et tout entier k strictement positif, on a

$$V_{moy}(S) = \frac{1}{kT} \int_a^{a+kT} S(t)dt$$

$$V_{eff}(S) = \sqrt{\frac{1}{kT} \int_a^{a+kT} S^2(t)dt}$$

Exemple

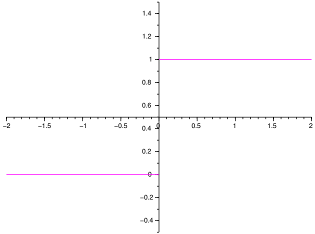
$V_{moy}(\sin(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)dt = \frac{1}{6\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+6\pi} \sin(t)dt$

Fonctions causales

Definition On appelle fonction causale, toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(0) \neq 0$.

Exemple

La fonction causale échelon unité est la fonction définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = 0$ *si* $x < 0$ *et* $f(x) \neq 1$ *si* $x \geq 0$.

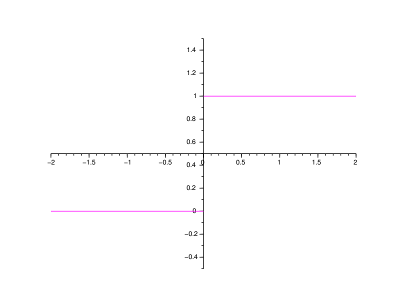


Fonctions causales

Definition On appelle fonction causale, toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(0) \neq 0$.

Exemple

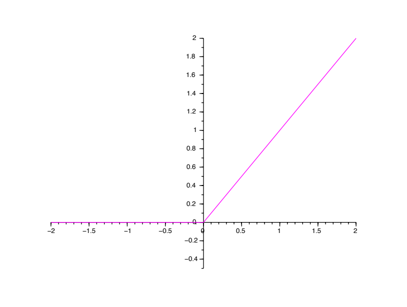
La fonction causale échelon unité est la fonction définie par f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = 0$ *si* $x < 0$ *et* $f(x) \neq 1$ *si* $x \geq 0$.



Fonctions causales

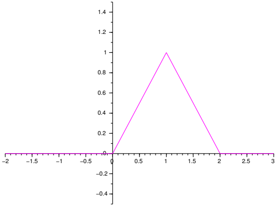
Exemple

Soit a un nombre réel strictement positif. La fonction causale rampe *de pente a est la fonction définie par* $f : \mathbb{R}\tau\mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = 0$ *si* $x < 0$ *et* $f(x) \neq ax$ *si* $x \geq 0$.

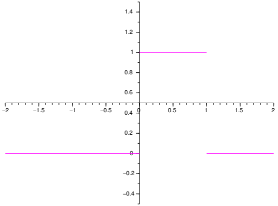


Fonctions particulières

La fonction triangle :

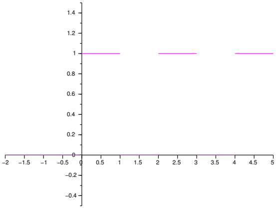


La fonction rectangle :



Fonctions particulières

La fonction créneau : :



Intégrales appliquées

Intégrale des fonctions à valeurs complexes

Definition Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une application. Notons $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ les uniques applications telles que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ pour tous x dans $[a, b]$. On dira que l'application f est intégrable lorsque f_1 et f_2 le sont. Dans ce cas on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt$$

Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t + i\cos(t)dt = int_0^{\frac{\pi}{2}} 2tdt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = [t^2]_0^{\frac{\pi}{2}} + i[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} + i$$

Intégrales appliquées

Exponentielle complexe

Proposition

pour tous nombre complexe α *non nul, la fonction* $t \mapsto \exp(\alpha t)$ *est intégrable sur tout intervalle* $[a, b]$ *et on a*

$$\int_a^b \exp(at)dt = [\frac{1}{a}\exp(at)]_a^b$$

Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(5+2i)t}dt = [\frac{1}{5+2i}e^{(5+2i)t)}]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{1}{5+2i}\left(e^{(5+2i)\times\frac{\pi}{4}} - e^{((5+2i)\times 0})\right) =$$

$$\frac{1}{5+2i}(e^{\frac{5\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}} - 1) = \frac{5-2i}{29}(ie^{\frac{5\pi}{4}} - 1) = \frac{1}{29}\left((2e^{\frac{5\pi}{4}} - 5) + i(5e^{\frac{5\pi}{4}} + 2)\right)$$

Intégrales appliquées

Exponentielle complexe

Proposition

pour tous nombre complexe α non nul, la fonction $t \mapsto \exp(\alpha t)$ est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b \exp(at)dt = [\frac{1}{a}\exp(at)]_a^b$$

Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(5+2i)t}dt = [\frac{1}{5+2i}e^{(5+2i)t)}]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{1}{5+2i}\left(e^{(5+2i)\times\frac{\pi}{4}} - e^{((5+2i)\times 0}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{5+2i}(e^{\frac{5\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}} - 1) = \frac{5-2i}{29}(ie^{\frac{5\pi}{4}} - 1) = \frac{1}{29}\left((2e^{\frac{5\pi}{4}} - 5) + i(5e^{\frac{5\pi}{4}} + 2)\right)$$