DE L'ORIGINE
ET DES LIMITES
DE LA
CORRESPONDANCE
ENTRE
L'ALGÈBRE ET LA GÉOMÉTRIE

PAR A.-A. COURNOT

INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'UNIVERSITÉ

> Les nombres imitent l'espace, qui sont de nature si différente
>
> PASCAL

L. HACHETTE ET C^ie

LIBRAIRES DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE

A PARIS — RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12 (Quartier de l'École de Médecine)

A ALGER — RUE DE LA MARINE, N° 147 (Librairie centrale de la Méditerranée)

1847

CHAPITRE IV.

DE L'ALGÈBRE ET DE SES RAPPORTS AVEC LA THÉORIE DE L'ORDRE. — ORIGINE DES VALEURS IMAGINAIRES.

26. On peut donner des définitions de l'arithmétique, de la géométrie, de la statique, qui seront justes et claires pour tout le monde, même pour ceux qui n'ont pas fait une étude de ces sciences, en disant, par exemple, que l'une a pour objet les propriétés des nombres, l'autre les propriétés de l'étendue, la troisième enfin les conditions d'équilibre des forces. Que ces définitions ou d'autres semblables, placées en tête d'un traité didactique, soient d'une grande utilité, c'est une autre question qu'il appartient aux logiciens d'examiner; mais toujours est-il, et ceci mérite attention, que les termes que nous venons de citer sont du nombre de ceux qu'un lexicographe n'éprouve nul embarras à définir, et dont un auteur didactique peut, s'il le juge convenable, placer la définition *in limine*, sans aucun inconvénient.

Il n'en est pas de même de l'algèbre. Les définitions qu'on en donne sont obscures, peu intelligibles pour ceux à qui l'algèbre n'est pas familière, et elles varient considérablement, selon les vues systématiques de ceux qui les ont imaginées.

Je consulte la dernière édition du *Dictionnaire de l'Académie*, et j'y lis que l'algèbre est « cette partie des mathématiques, qui, considérant les grandeurs d'une même nature sous la seule acception abstraite de leur inégalité, les exprime par des caractères communs à toutes leurs valeurs particulières, et développe ainsi leurs relations de quantité les plus générales. »

D'Alembert, dans l'*Encyclopédie,* définit l'algèbre « la science du calcul des grandeurs considérées généralement ; » et tout aussitôt il ajoute que l'algèbre « est proprement la méthode de calculer les quantités indéterminées. » Nous n'avons pas besoin de faire remarquer que toutes ces définitions seraient incompréhensibles pour quiconque ne connaîtrait pas l'algèbre ; et que, pour ceux qui la connaissent, elles ne fixent point avec précision ce qui est et ce qui n'est pas du domaine de l'algèbre, dans le cadre général des mathématiques.

Suivant l'auteur d'un Dictionnaire plus récent *, « l'algèbre est la science des nombres considérés en général ou la science des lois des nombres; » d'où il résulterait, par exemple, que cette proposition : un nombre ne peut être décomposé que d'une seule manière en facteurs premiers, est un théorème d'algèbre;

* M. de Montferrier, *Dictionnaire des Sciences mathématiques pures et appliquées,* au mot ALGÈBRE.

et ce qui réduirait l'arithmétique à n'être qu'une science de faits, comme ceux dont on s'instruit en apprenant la table de Pythagore ou en consultant une table de logarithmes.

Enfin, pour ne pas abuser des citations, suivant M. Poinsot, l'algèbre est la science de l'ordre : idée fine et profonde, mais qui a besoin de commentaire, et que l'auteur lui-même, dans un de ses derniers écrits, a lucidement commentée. « Si vous considérez l'algèbre, dit-il *, vous y voyez deux parties très-distinctes. Et d'abord l'algèbre ordinaire, qu'on peut très-bien nommer l'*arithmétique universelle*. Cette algèbre, en effet, n'est autre chose qu'une arithmétique généralisée, c'est-à-dire étendue des nombres particuliers à des nombres quelconques, et, par conséquent, des opérations actuelles qu'on exécutait à des opérations qu'on ne fait plus qu'indiquer par des signes; de manière que, dans cette première spéculation de l'esprit, on songe moins à obtenir le résultat de ces opérations successives qu'à en tracer le tableau, et à découvrir ainsi des formules générales pour la solution de tous les problèmes du même genre.

« Mais il y a une algèbre supérieure, qui repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinai-

* *Réflexions sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres*, page 4.

sons, qui s'occupe de la nature et de la composition des formules considérées en elles-mêmes, comme de purs symboles, et sans aucune idée de valeur ou de quantité. C'est à cette partie qu'on doit rapporter la théorie profonde des équations, celle des expressions imaginaires, et tout l'art des transformations algébriques; et c'est même cette seule partie élevée de la science qui mérite, à proprement parler, le nom d'*algèbre.* »

Nous n'avons à ajouter à ces indications lumineuses que quelques développements plus spécialement appropriés au but de notre ouvrage.

27. Supposons qu'on veuille démontrer ce théorème d'arithmétique, qu'un nombre qui en divise deux autres divise le reste de la division du plus grand par le plus petit : on pourra faciliter le raisonnement, en mieux faire ressortir la généralité, en représentant les nombres par des lettres, en employant les signes ordinaires des opérations d'arithmétique, et en exprimant par un signe l'égalité qui doit exister entre le dividende d'une part, et d'autre part la somme de deux nombres, dont l'un est le produit du diviseur par le quotient, l'autre est le reste de la division. Mais l'emploi de ces notations commodes ne fera pas qu'on soit sorti de la pure arithmétique et de l'étude des propriétés des nombres.

On pourra faciliter, à l'aide des mêmes symboles, la