

Université de Caen Basse-Normandie

Généralisations algébriques des groupes de tresses

Eddy Godelle

jeudi 7 avril 2011

Jury :

Patrick Dehornoy, Professeur des universités
François Digne, Professeur des universités
John Fountain, Professeur des universités
Meinolf Geck, Professeur des universités (rapporteur)
Jean Michel, Directeur de recherche
Luis Paris, Professeur des universités

Introduction

Le groupe des tresses est un objet qui apparaît dans de nombreux domaines mathématiques, tels que la topologie, l'algèbre et la combinatoire. Il permet en particulier de construire des invariants en théorie des noeuds mais aussi d'étudier les représentations des groupes algébriques réductifs. Il possède également de nombreuses généralisations qui proviennent de ces différents domaines. Citons les groupes de tresses de surfaces, les groupes d'Artin-Tits associés aux groupes de Weyl, et plus généralement aux groupes de réflexions complexes, les groupes d'Artin-Tits classiques, les groupes (localement) Garside, et enfin les groupes des tresses singulières ou virtuelles. La méthode classique, appliquées avec succès par Deligne (1972), pour étudier les groupes d'Artin-Tits est l'utilisation d'une famille particulière de sous-groupes, les sous-groupes paraboliques pour construire un complexe sur lequel le groupe agit. Ceci explique l'importance de cette famille de sous-groupes. Le fil directeur de mes travaux est l'étude des groupes d'Artin-Tits et de leurs généralisations via leurs sous-groupes paraboliques. Durant ma thèse, je me suis concentré sur les groupes d'Artin-Tits et plus précisément sur la structure de leur famille de sous-groupes paraboliques. Par la suite, outre un certain nombre de travaux sur différentes généralisations des groupes de tresses [61, 63, 66, 36], mes travaux peuvent être regroupés en trois grands axes : le premier [62, 64, 67, 69, 74, 73] est l'étude des groupes dit *de Garside* ou *localement Garside*, dont les groupes d'Artin-Tits sont des cas particuliers. Le deuxième [68, 71, 72] est l'étude des monoïdes de Renner et de leurs algèbres de Hecke. Le troisième [65, 70] porte sur les représentations des groupes de tresses comme groupes d'automorphismes de groupes libres.

Ce mémoire comprend 4 chapitres. Le premier est consacré aux groupes d'Artin-Tits. Il s'agit à la fois d'un chapitre d'introduction, où les groupes d'Artin-Tits et les notions utiles aux autres chapitres sont introduits, et d'un chapitre de présentation de mes contributions à l'étude des groupes d'Artin-Tits. Le deuxième chapitre est consacré aux groupes de Garside. J'y explique comment j'ai étendu la notion de sous-groupe parabolique aux groupes de Garside, et comment cette notion peut être utile, par exemple, pour l'étude des groupes d'Artin-Tits et des solutions des équations de Yang-Baxter. Dans le chapitre 3, j'explique les raisons qui m'ont conduit à m'intéresser aux monoïdes de Renner et mes contributions à leur compréhension. Enfin, dans le dernier chapitre, je présente quelques résultats relatifs aux liens entre les tresses et les substitutions sur les mots infinis.

Remerciements

Je remercie en premier lieu John Guaschi d'avoir accepté de me parrainer et de s'être occupé des démarches administratives.

Mes remerciements vont naturellement à Ruth Charney, Meinolf Geck et Lex Renner qui ont accepté de rapporter sur mes travaux. J'adresse aussi ma gratitude à Patrick Dehornoy, François Digne, John Fountain, Jean Michel et Luis Paris pour avoir accepté de se joindre au jury, et pour tout le reste aussi...

Je tiens à saluer amicalement mes co-auteurs. Si la recherche est souvent solitaire, résoudre un problème à la suite d'un échange d'idées est toujours un grand plaisir.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes avec qui j'ai eu l'occasion de discuter et qui, par leur intérêt, ont contribué à la réussite de mes travaux. Je tiens à remercier particulièrement, outre les personnes déjà citées, Michel Brion, Volker Gebhardt, Christian Kassel, Gustav Lehrer, Claus Mockler, Mohan Putcha, Gwenaël Richomme et Louis Solomon.

Je remercie aussi tous les membres du LMNO pour l'atmosphère amicale qui n'a jamais cessé de flotter dans les couloirs depuis mon arrivée à Caen.

Un grand merci à Agnès, car être marié à un mathématicien n'est pas toujours facile en pratique.

Je ne peux terminer ces remerciements sans une pensée pour ma grand-mère paternelle qui m'a appris à compter et une autre à ma fille Ava, qui persiste à soutenir que les cinq premiers nombres sont 1, 2, 3, 5, 12.

Table des matières

1	Les groupes d'Artin-Tits et leurs paraboliques	7
1.1	Matrice et graphe de Coxeter	7
1.2	La conjecture du $K(\pi, 1)$	8
1.3	Le complexe de Charney-Davis-Deligne	9
1.4	Complexe cubique $CAT(0)$	11
1.4.1	Le problème du mot	12
1.4.2	Normalisateur et propriété FRZ	13
1.4.3	La catégorie des rubans	17
2	Les paraboliques des structures de Garside	18
2.1	La structure de Garside des groupes d'Artin-Tits	18
2.1.1	Divisibilité et forme normale	18
2.1.2	Morphisme entre groupes d'Artin-Tits	20
2.2	Sous-groupes remarquables des groupes de Garside	22
2.2.1	Groupes de Garside	23
2.2.2	Sous-groupes paraboliques et sous-groupes de Garside	24
2.2.3	Catégorie de Garside	27
2.3	Applications	30
2.3.1	Équation de Yang-Baxter	31
2.3.2	Groupe localement Garside de type FC	32
3	Algèbre de Hecke des monoïdes de Renner	35
3.1	Le monoïde des permutations partielles	35
3.2	Présentation des monoïdes de Renner	38
3.2.1	Monoïde réductif	38
3.2.2	Section transverse et fonction de type	41
3.3	Algèbre de Hecke	44
3.3.1	Monoïde réductif fini	44
3.3.2	Monoïde de Renner généralisé	45
3.4	Perspectives	48
4	Automorphismes de groupe libre et représentation de tresses	50
4.1	Représentation du groupe de tresses	50
4.1.1	Graphe et transvection	51

4.1.2	Autour d'une conjecture de Tits	52
4.1.3	Une liste de questions	53
4.2	Autour de la notion de paire sturmienne	55
4.2.1	L'espace stable d'un endomorphisme	55
4.2.2	Mots et morphismes épisturmiens	56

Chapitre 1

Les groupes d'Artin-Tits et leurs paraboliques

L'objectif de ce chapitre est de présenter la notion de sous-groupe parabolique (standard) dans le cadre classique des groupes d'Artin-Tits, et d'expliquer son intérêt. Dans la section 1.3, je montre comment les sous-groupes paraboliques sont liés à la conjecture dite du $K(\pi, 1)$ via le complexe de Charney-Davis-Deligne, et comment je les ai utilisés avec L. Paris dans [73] pour contribuer à prouver la validité de cette conjecture dans un certain nombre de cas. J'explique ensuite dans la section 1.4.1 comment le complexe de Charney-Davis-Deligne peut permettre de résoudre le problème de mot pour certains groupes d'Artin-Tits grâce à des réalisations géométriques $CAT(0)$. J'explique ensuite comment j'ai étendu d'un point de vue algébrique la notion géométrique de ruban pour comprendre les normalisateurs et centralisateurs des sous-groupes paraboliques [59, 60, 64]. Enfin, j'indique rapidement comment cela m'a conduit à l'un des premiers exemples de catégorie de Garside [69], notion dont je parlerai plus largement dans le chapitre suivant.

1.1 Matrice et graphe de Coxeter

Commençons par rappeler la définition d'un groupe d'Artin-Tits. Une *matrice de Coxeter* est une matrice carrée symétrique $M = (m_{i,j})$ de dimension n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et dont la valeur des autres coefficients est soit ∞ soit un entier au moins égal à 2. À toute matrice de Coxeter M de dimension n , on associe un *graphe de Coxeter* Γ_M . Ce graphe est un graphe simple (sans boucle ni arêtes multiples) à n sommets x_1, \dots, x_n et indexé. Une arête relie deux sommets distincts x_i et x_j si $m_{i,j}$ n'est pas égal à 2. Dans ce cas, cette arête est indexée par $m_{i,j}$. Lorsque $m_{i,j} = 3$, on omet de mettre l'index sur l'arête. La raison de cette convention est que dans de nombreux exemples, beaucoup de coefficients sont égaux à 2 ou 3. À tout graphe de Coxeter Γ à n sommets associé à une matrice de Coxeter $M = (m_{i,j})$, on peut associer un

groupe de Coxeter $W(\Gamma)$ et un groupe d'Artin-Tits $A(\Gamma)$ qui sont définis par leurs présentations :

$$W(\Gamma) = \langle s_1, \dots, s_n \mid s_i^2 = 1; \underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}}, i \neq j \text{ et } m_{i,j} \neq \infty \rangle.$$

$$A(\Gamma) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \mid \underbrace{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \sigma_j \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}}, i \neq j \text{ et } m_{i,j} \neq \infty \rangle.$$

Par exemple, si $m_{i,j} = 2$ pour $|i - j| \geq 2$ et $m_{i,j} = 3$ pour $|i - j| = 1$, le groupe de Coxeter obtenu est le groupe symétrique \mathcal{S}_{n+1} et le groupe d'Artin-Tits est le groupe de tresses B_{n+1} à $n + 1$ brins. En général, on note de la même façon un sommet de Γ et les générateurs de $W(\Gamma)$ et de $A(\Gamma)$ correspondants.

L'étude de ces groupes est l'objet d'un très grand nombre d'articles. Pourtant, si les groupes de Coxeter semblent assez bien compris, les groupes d'Artin-Tits demeurent mystérieux et des questions aussi basiques que le problème du mot et le problème de torsion sont ouverts dans le cas général. Comme nous le verrons plus loin, certaines familles ont fait l'objet d'une attention particulière et occupent une place centrale dans la théorie. C'est principalement le cas de la famille des groupes d'Artin-Tits de *type sphérique* qui sont ceux dont le groupe de Coxeter associé est fini. Dans ce cas, on dira que le graphe de Coxeter est de *type sphérique*. Ces groupes sont bien compris et leurs graphes de Coxeter sont classifiés.

Un point essentiel pour l'étude des groupes d'Artin-Tits est que pour tout graphe de Coxeter Γ il existe un morphisme de groupes surjectif canonique de $A(\Gamma)$ dans $W(\Gamma)$ qui envoie σ_i sur s_i . Le noyau de ce morphisme s'appelle le groupe d'Artin-Tits coloré $CA(\Gamma)$ et sera noté $CA(\Gamma)$ dans la suite.

$$1 \rightarrow CA(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma) \rightarrow W(\Gamma) \rightarrow 1$$

1.2 La conjecture du $K(\pi, 1)$

C'est un fait classique [21, Chap. V] que tout groupe de Coxeter $W(\Gamma)$ est linéaire et qu'il possède une représentation canonique fidèle dans un groupe linéaire $GL(V)$ où V est un espace vectoriel réel dont la dimension est égale au nombre de sommets n du graphe Γ . De plus, dans ce contexte, les générateurs canoniques s_i sont des réflexions orthogonales par rapport à des hyperplans. Une des principales questions ouvertes de la théorie des groupes de Coxeter est certainement la validité de la *conjecture du $K(\pi, 1)$* que je présente maintenant.

Fixons un graphe de Coxeter Γ avec n sommets. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de base e_1, \dots, e_n . On définit la forme bilinéaire symétrique B par $B(e_i, e_j) = -\cos(\frac{\pi}{m_{i,j}})$ et on note ρ_i l'endomorphisme défini par $\rho_i(x) = x - 2B(e_i, x)e_i$. C'est la réflexion orthogonal par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur non-isotrope e_i . L'application $s_i \mapsto \rho_i$ s'étend en une représentation fidèle $\rho : W_\Gamma \rightarrow GL(V)$. Considérons $W = W(\Gamma)$ comme un sous-groupe de $GL(V^*)$ via la représentation contragrédiente $\rho^* : W \rightarrow GL(V^*)$.

Posons $R = \{ws_iw^{-1} \mid w \in W, 1 \leq i \leq n\}$ l'ensemble des *réflexions* de W . Notons H_i l'hyperplan $\{x^* \in V^* \mid x^*(e_i) = 0\}$ des points fixes de s_i , et posons $H_r = wH_{s_i}w^{-1}$ pour $r = ws_iw^{-1}$ dans R . Soit \overline{C} le cône $\{x^* \in V^* \mid \forall i, x^*(e_i) \geq 0\}$. Le *cône de Tits* I est l'ensemble $I = \bigcup_{w \in W} w(\overline{C})$. Enfin posons

$$E = E(\Gamma) = (I \times V) \setminus \left(\bigcup_{r \in R} H_r \times H_r \right).$$

Le groupe W agit alors librement et de façon proprement discontinue sur $E(\Gamma)$, qui est un feuilletage connexe de dimension $2n$. Le résultat crucial sur le sujet est

Théorème 1.2.1. [124] *Les groupes $\pi_1(E)$ et $\pi_1(E/W)$ sont canoniquement isomorphes à $CA(\Gamma)$ et $A(\Gamma)$, respectivement. De plus, la suite exacte associée au revêtement régulier $E \rightarrow E/W$ est $1 \rightarrow CA(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma) \rightarrow W \rightarrow 1$.*

On dira que Γ est du type $K(\pi, 1)$ si l'espace $E(\Gamma)$ est un espace d'Eilenberg MacLane. La conjecture centrale sur le sujet, dite du $K(\pi, 1)$, est due à Arnold, Pham et Thom :

Conjecture 1.2.2. *Tout graphe de Coxeter est de type $K(\pi, 1)$.*

Le premier résultat important relatif à cette conjecture est due à Deligne, qui a montré en 1972 dans [40] que les graphes de Coxeter de type sphérique sont de type $K(\pi, 1)$. Le type $K(\pi, 1)$ de certains graphes de Coxeter de type affine a ensuite été établi [100] (voir aussi [27]). La deuxième avancée importante sur le sujet est due à R. Charney et M. Davis qui ont montré en 1995 dans [24] que les graphes de Coxeter *de type FC* sont de type $K(\pi, 1)$. Ces graphes sont caractérisés par le fait que tout sous-graphe plein sans arête indexée par ∞ est un graphe de Coxeter de type sphérique. Ce résultat a été récemment amélioré par G. Ellis et E. Skoldberg, qui ont montré [48] que :

Théorème 1.2.3. *Soit Γ un graphe de Coxeter. Si tout sous-graphe plein de Γ sans liaison ∞ est de type $K(\pi, 1)$, alors le graphe Γ est de type $K(\pi, 1)$.*

Ceci permet de restreindre la conjecture aux graphes de Coxeter sans liaison ∞ . En utilisant les sous-groupes paraboliques, L. Paris et moi avons obtenu une preuve alternative de ce résultat dans [73], ainsi qu'une solution au problème de mot. C'est ce que je vais expliquer maintenant.

1.3 Le complexe de Charney-Davis-Deligne

Considérons un graphe de Coxeter Γ et notons S l'ensemble de ses sommets. Si X est un sous-ensemble de S , le sous-graphe plein Γ_X de Γ engendré par X est aussi un graphe de Coxeter. Il découle des définitions qu'il existe deux morphismes de groupes canoniques $\iota : W(\Gamma_X) \rightarrow W(\Gamma)$ et $\tilde{\iota} : A(\Gamma_X) \rightarrow A(\Gamma)$. Le point essentiel est que ces morphismes sont en fait des plongements. La

preuve de l'injectivité du morphisme ι se trouve dans [21]. L'injectivité du second morphisme $\tilde{\iota}$ a été prouvée par Van der Lek dans sa thèse [124]. Dans [73] nous avons donné une nouvelle preuve, très courte de ce résultat, en utilisant l'injectivité de ι . Les sous-groupes images de $W(\Gamma_X)$ et $A(\Gamma_X)$ par ι et $\tilde{\iota}$, respectivement, sont appelés des *sous-groupes paraboliques standards* de $W(\Gamma)$ et de $A(\Gamma)$, respectivement. On les note respectivement W_X et A_X . Un *sous-groupe parabolique* est un sous-groupe qui est conjugué à un sous-groupe parabolique standard. Comme nous allons le voir, la famille des sous-groupes paraboliques est un outil très puissant pour étudier les groupes d'Artin-Tits et de Coxeter. C'est en particulier un élément essentiel pour étudier la conjecture du $K(\pi, 1)$ et le problème de mot des groupes d'Artin-Tits. En effet, cette famille de sous-groupes permet de construire un complexe simplicial sur lequel agit le groupe. Notons Σ l'ensemble canonique des générateurs de $A(\Gamma)$. Si $X \subseteq S$, on note Σ_X le sous-ensemble de Σ associé. Notons \mathcal{S}^∞ l'ensemble des sous-ensembles de S dont le sous-graphe plein associé ne contient pas d'arête indexée par ∞ . Notons aussi \mathcal{S}^f l'ensemble des sous-ensembles de S dont le sous-graphe plein associé est un graphe de Coxeter de type sphérique. Si \mathcal{S}^* est une famille de sous-ensembles de S , on note $\mathcal{A}(\mathcal{S}^*)$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}^*) = \{gA_T \mid g \in A(\Gamma), T \in \mathcal{S}^*\}.$$

Cet ensemble est muni d'un ordre partiel \leq défini par $gA_T \leq hA_U$ si $T \subseteq U$ et $h^{-1}g \in A_U$. Dans [73], nous définissons le *complexe de Charney-Davis-Deligne relatif à \mathcal{S}^** , noté $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^*)$, comme la réalisation géométrique du complexe dérivé de $\mathcal{A}(\mathcal{S}^*)$. Nous montrons que

Théorème 1.3.1. [73, Théorèmes 3.1 et 4.2] *Soit Γ un graphe de Coxeter et S son ensemble de sommets. Si tout graphe contenu dans \mathcal{S}^∞ est de type $K(\pi, 1)$, alors*

(i) *Le complexe $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^\infty)$ a le même type d'homotopie que le revêtement universel de $E(\Gamma)$.*

(ii) *Le complexe simplicial $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^\infty)$ est $CAT(0)$, donc contractible.*

De ce résultat découle le théorème 1.2.3. La structure d'espace $CAT(0)$, et plus précisément la structure cubique naturelle, ont d'autres applications. Nous y reviendrons dans la prochaine section. Nous montrons dans les théorèmes 3.1 et 4.2 de [73] que le résultat énoncé dans le théorème 1.3.1 est en outre valide si à la place de \mathcal{S}^∞ , on considère une famille \mathcal{S}^* de sous-ensembles de S que nous qualifions de *complète* (et dont on suppose de plus qu'elle est de *type relativement FC* pour (ii)). Les familles \mathcal{S}^f et \mathcal{S}^∞ sont les principaux exemples de familles complètes. R. Charney et M. Davis avaient montré ce résultat pour la famille \mathcal{S}^f dans [24]. C'est ainsi, qu'ils ont prouvé que les groupes d'Artin-Tits de type FC sont de type $K(\pi, 1)$. Notre approche générale est assez similaire de celle de R. Charney et M. Davis et donc assez technique. Néanmoins, ces derniers ont utilisé de manière essentielle des propriétés spécifiques des groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Nous avons donc eu besoin de développer un outil fondamentalement nouveau pour établir notre résultat : l'ensemble $W(\Gamma) \times \mathcal{S}^f$

est partiellement ordonné par la relation \leq défini par $(w, X) \leq (v, Y)$ si $X \subseteq Y$, $v^{-1}w \in W_Y$ et $v^{-1}w$ est minimal de longueur minimal dans sa classe $v^{-1}wW_X$. Le *complexe de Charney-Davis/Salvetti* est la réalisation géométrique $\Omega(\Gamma)$ du complexe simplicial dérivé de cet ensemble partiellement ordonné. R. Charney et M. Davis [25] et M. Salvetti [118] ont montré qu'il existe une équivalence d'homotopie entre $\Omega = \Omega(\Gamma)$ et $E(\Gamma)$ qui est équivariante pour l'action de $W = W(\Gamma)$ et qui induit une équivalence d'homotopie entre Ω/W et $E(\Gamma)/W$. Le point crucial et sans doute le plus original de notre article est le théorème 1.3.2 ci-dessous. Soit $T \subseteq S$ et $\mathcal{S}_T^f = \{X \in \mathcal{S}^f \mid X \subseteq T\}$. L'application d'inclusion $W(\Gamma_T) \times \mathcal{S}_T^f \hookrightarrow W(\Gamma) \times \mathcal{S}^f$ induit un plongement $\Omega(\Gamma_T) \hookrightarrow \Omega(\Gamma)$ qui est W_T -équivariant.

Théorème 1.3.2. [73, Théorème 2.2] *Soit Γ un graphe de Coxeter et S son ensemble de sommets.*

(i) *Soit $T \subseteq S$. Le plongement $\Omega(\Gamma_T) \hookrightarrow \Omega(\Gamma)$ possède une rétraction W_T -équivariante $\pi_T : \Omega(\Gamma) \rightarrow \Omega(\Gamma_T)$.*

(ii) *Soit $R, T \subseteq S$. La restriction à Ω_R de $\pi_T : \Omega(\Gamma) \rightarrow \Omega(\Gamma_T)$ coïncide avec $\pi_{T \cap R} : \Omega(\Gamma_R) \rightarrow \Omega(\Gamma_{R \cap T})$.*

Ce résultat se révèle très puissant et permet également de donner une preuve courte du résultat classique démontré par Van der Lek dans sa thèse [124] : si Γ est un graphe de Coxeter de sommet S , et T est une partie de S , alors le sous-groupe parabolique de $A(\Gamma)$ engendré par Σ_T est canoniquement isomorphe à $A(\Gamma_T)$. De plus, si U est une autre partie de S , alors $A_T \cap A_U = A_{T \cap U}$. Par exemple, pour montrer le premier résultat, il suffit de considérer le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \rightarrow & CA_{\Gamma_T} & \longrightarrow & A_{\Gamma_T} & \longrightarrow & W_{\Gamma_T} & \rightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & CA_{\Gamma} & \longrightarrow & A_{\Gamma} & \longrightarrow & W_{\Gamma} & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Les lignes sont des suites exactes. L'homomorphisme $CA_{\Gamma_T} \rightarrow CA_{\Gamma}$ est injectif par le Théorème 2.2 de [73] et l'homomorphisme $W_{\Gamma_T} \rightarrow W_{\Gamma}$ est injectif par [21]. On en conclut que l'homomorphisme $A_{\Gamma_T} \rightarrow A_{\Gamma}$ est également injectif. La preuve de [73, Théorème 2.2] est constructive, puisqu'on donne une formule explicite pour $\pi_T(gA_U)$.

1.4 Complexe cubique $CAT(0)$

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu comment les groupes d'Artin-Tits permettent de construire un complexe qui permet de prouver la conjecture du $K(\pi, 1)$ dans un certain nombre de cas. Nous allons voir maintenant comment ce complexe peut également permettre de répondre à des questions qui concernent les groupes d'Artin-Tits.

1.4.1 Le problème du mot

La question du problème du mot pour les groupes d'Artin-Tits reste largement ouverte. Dans le cas particulier des groupes d'Artin-Tits de type sphérique, des solutions rapides existent qui utilisent la structure de Garside de ces groupes. Pour les groupes d'Artin-Tits qui ne sont pas de type sphérique, l'une des approches les plus efficaces est à ce jour l'étude des actions de ces groupes sur de bonnes réalisations géométriques, c'est-à-dire $CAT(0)$, des complexes de Charney-Davis-Deligne. L'étude des espaces $CAT(0)$ et des groupes discrets agissant sur ces derniers est un domaine actif. La référence sur ce sujet est sans nul doute le livre de M. Bridson et A. Haefliger [19], auquel je renvoie pour tous détails sur le sujet. Deux des propriétés importantes des espaces $CAT(0)$ sont, d'une part, l'existence de géodésiques et, d'autre part, le fait qu'ils sont contractibles. Parmi ces espaces, les complexes cubiques $CAT(0)$ occupent une place particulière. Rappelons qu'un complexe cubique est un complexe cellulaire polyédrique dont chaque cellule est isométrique à un cube de côté 1 dans un espace euclidien, et dont les applications de recollement sont des isométries. L'intérêt porté à ces complexes cubiques est principalement dû à deux raisons. D'une part, un fameux résultat de M. Gromov [76] dit que la propriété $CAT(0)$ d'un complexe de cubes simplement connexe dont la dimension des cubes est bornée se voit sur les *link* des sommets du complexe. Il est donc relativement facile de déterminer si un espace cubique est $CAT(0)$ ou non, ce qui n'est pas le cas pour un complexe polyédrique quelconque. D'autre part, dans [99] G. Niblo et L. Reeves ont montré que dans un tel complexe cubique $CAT(0)$, deux sommets x et y peuvent être joints par un unique *chemin cubique normal* allant de x à y . Nous renvoyons à [99] pour une définition précise de cette notion. L'idée essentielle est la suivante : si $x = y$, ce chemin est la suite à un élément (x) ; si $x \neq y$, ce chemin est l'unique suite finie $(x_1 = x, x_2, \dots, x_{n+1} = y)$ de sommets distincts telle que pour tout i , les sommets x_i et x_{i+1} engendrent un cube C_i avec $C_i \cap C_{i+1} = \{x_i\}$, plus une condition technique locale qui assure que pour aller de x_i à x_{i+2} , le sommet x_{i+1} est choisi de façon à ce que le cube C_i soit de la dimension maximale possible (en particulier, x_i et x_{i+2} ne sont pas dans un même cube). Ici on fait un choix de sens de parcours et en général le chemin cubique normal de y à x n'est pas (x_{n+1}, \dots, x_1) . Le point difficile du résultat de [99] réside, bien entendu, dans le caractère unique d'une telle suite.

Supposons que \mathcal{S}^* est une partie complète comme définie dans [73]. Si le complexe de Charney-Davis-Deligne $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^*)$ est un complexe cubique $CAT(0)$, alors pour résoudre le problème de mot, il suffit de trouver un algorithme qui, étant donné deux paires (v, X) et (w, Y) , telles que v et w sont deux mots sur $\Sigma^{\pm 1}$ et X, Y sont des sous-ensembles de S , construit le chemin cubique normal (*i.e.* des représentants de la suite x_1, \dots, x_{n+1}) entre les sommets $x_1 = \bar{v}A_X$ et $x_{n+1} = \bar{w}A_Y$, où \bar{v} et \bar{w} sont les éléments de $A(\Gamma)$ représentés par v et w , respectivement. Pour savoir si le mot w représente l'unité, il suffit alors d'appliquer l'algorithme aux paires $(1, \emptyset)$ et (w, \emptyset) . L'unicité du chemin cubique normal assure que $\bar{w} = 1$ si et seulement si le chemin cubique normal obtenu est trivial. Pour un graphe Γ de type FC, R. Charney et M. Davis ont montré

dans [24] que le complexe cubique $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^f)$ est $CAT(0)$ grâce au résultat de Gromov. R. Charney et J. Altabelli ont alors résolu dans [2] le problème du mot pour $A(\Gamma)$ en appliquant la méthode ci-dessus avec $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^f)$. Pour cela, ils utilisent que le problème du mot dans les groupes d'Artin-Tits de type sphérique possède des solutions connues. Dans [73], nous appliquons la même méthode avec $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^\infty)$ pour résoudre le problème de mot dans les groupes d'Artin-Tits de type $K(\pi, 1)$, sous l'hypothèse que l'on sait résoudre le problème de mot pour les sous-groupes associés aux graphes de \mathcal{S}^∞ . Nous commençons par montrer que le complexe est $CAT(0)$ en déterminant les *links* aux sommets, puis nous construisons l'algorithme de façon similaire à celle de [2]. Comme pour la conjecture du $K(\pi, 1)$, nous utilisons de façon importante la rétraction $\pi_T : \Omega(\Gamma) \rightarrow \Omega(\Gamma_T)$ (*cf.* Section 1.3) là où R. Charney et J. Altabelli utilisent les propriétés des groupes d'Artin-Tits de type sphérique.

1.4.2 Normalisateur et propriété FRZ

Le complexe de Charney-Davis-Deligne est ainsi un outil important pour comprendre à la fois les groupes de Coxeter et les groupes d'Artin-Tits. Sa construction est basée sur la notion de sous-groupe parabolique standard. En particulier, si on considère l'action par multiplication à gauche du groupe d'Artin-Tits sur ce complexe, le fixateur d'un sommet est un sous-groupe parabolique. Il est donc utile pour comprendre cette action d'étudier les normalisateurs des sous-groupes paraboliques. Rappelons les définitions suivantes. Si Γ est un graphe de Coxeter d'ensemble de sommets S , et $X \subseteq S$, on appelle normalisateur, quasi-centralisateur, centralisateur, et commensurateur de A_X dans $A = A(\Gamma)$ les sous-groupes de A suivants :

$$N_A(A_X) = \{g \in A \mid gA_Xg^{-1} = A_X\}$$

$$QZ_A(A_X) = \{g \in A \mid g\Sigma_Xg^{-1} = \Sigma_X\}$$

$$Z_A(A_X) = \{g \in A \mid \forall \sigma \in \Sigma_X, g\sigma g^{-1} = \sigma\}$$

$$\text{Com}_A(A_X) = \{g \in A \mid gA_Xg^{-1} \cap A_X \text{ est d'indice fini dans } A_X \text{ et dans } gA_Xg^{-1}\}$$

L'étude de ces sous-groupes a commencé dans [51], où le cas des groupes de tresses est considéré. Les auteurs se sont plus précisément intéressés à répondre à la question suivante :

Soit σ_1, σ_2 dans Σ . Peut-on caractériser les éléments g de A qui vérifient l'égalité $g\sigma_1g^{-1} = \sigma_2$? Cette question, qui peut sembler relativement anecdotique, est profondément liée à de nombreuses questions. Elle n'est pas sans lien avec la *conjecture de Birman* [17] qui a été prouvée dans [104]. C'est aussi un cas particulier du problème de conjugaison, dont la complexité supposée est la base des algorithmes de cryptographie utilisant les tresses. Rappelons leur résultat principal.

Proposition 1.4.1. [51, Theorem 2.2] *Soit B_n le groupe de tresses à $n + 1$ brins. Notons $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ses générateurs standards. Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et*

$g \in B_n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $g\sigma_i g^{-1} = \sigma_j$;
- (b) il existe un entier strictement positif n tel que $g\sigma_i^n g^{-1} = \sigma_j^n$;
- (c) pour tout entier positif n on a $g\sigma_i^n g^{-1} = \sigma_j^n$;
- (d) la tresse g possède une bande de type (i, j) .

Sans entrer dans les détails, le point (d) signifie que, géométriquement, on peut trouver une configuration de la tresse g telle que l'on puisse coller un *ruban* le long des brins d'indices i et $i+1$ de façon à ce qu'aucun autre brin ne traverse ce ruban, et que l'ensemble $\{i, i+1\}$ est envoyé sur $\{j, j+1\}$ par la permutation associée à g .

La compréhension algébrique de ce résultat géométrique est à la base de nombreux développements [4, 5, 7, 8, 33, 59, 60, 61, 69, 101, 102]. Cette propriété énoncée dans [51, Theorem 2.2] est désormais connue sous le nom de *propriété FRZ*. La lecture de cet article a été pour moi le point de départ d'une réflexion qui m'a conduit dans ma thèse à introduire la notion de catégorie des rubans [59], qui s'est révélée être l'un des premiers exemples de *catégories de Garside* [69]. Le point important de la propriété FRZ est que l'assertion (d) de l'énoncé montre que pour comprendre le centralisateur d'un générateur, il est nécessaire de comprendre comment un générateur peut être conjugué sur un autre. Nous présentons dans ce qui suit nos travaux sur ce sujet. La première généralisation de cette propriété apparaît dans [101] et [102] où L. Paris détermine les centralisateurs, normalisateurs, quasi-centralisateurs et commensurateurs des sous-groupes paraboliques standards indécomposables des groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Rappelons qu'un groupe d'Artin-Tits est dit *indécomposable* si son graphe de Coxeter est connexe. L. Paris montre en particulier, que tout groupe d'Artin-Tits de type sphérique vérifie la propriété FRZ. Dans [59], j'étends ce résultat à tout parabolique standard (sans hypothèse d'indécomposabilité) des groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Cela est rendu possible en introduisant la notion de ruban entre deux sous-groupes paraboliques standards (*i.e.* entre deux sous-ensembles de sommets de Γ) et la *catégorie des rubans*. Notre résultat principal sur la question (obtenu dans la thèse) peut être résumé par les deux énoncés 1.4.2 et 1.4.3 :

Théorème 1.4.2. [59, Théorèmes 0.1, 0.2 et 0.5] *Soit A un groupe d'Artin-Tits de type sphérique et A_X un sous-groupe parabolique standard.*

- (i) $\text{Com}_A(A_X) = \text{N}_A(A_X) = A_X \cdot \text{QZ}_A(A_X)$.
- (ii) $\text{QZ}_A(A_X)$ est précisément l'ensemble des rubans de type (X, X) .
- (iii) Si A_Y est un sous-groupe parabolique de A et qu'il existe $g \in A$ tel que $g^{-1}A_Y g \subseteq A_X$, alors il existe $Y_1 \subseteq X$ et $h \in A_X$ tel que $g^{-1}A_Y g = h^{-1}A_{Y_1} h$.

Le point (iii) indique que la notion de sous-groupe parabolique est relativement intrinsèque : si un sous-groupe parabolique est inclus dans un autre, alors il est parabolique dans ce dernier. Dans [59], comme dans [101, 102], l'approche est algébrique. Ceci explique que les énoncés se limitent au cadre des groupes d'Artin-Tits de type sphérique. A tout graphe de Coxeter Γ à n sommets associé à une matrice de Coxeter $M = (m_{i,j})$, on peut associer un monoïde

d'Artin-Tits $A^+(\Gamma)$ qui est défini par la présentation de monoïde :

$$A^+(\Gamma) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \mid \underbrace{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \sigma_j \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}}, i \neq j \text{ et } m_{i,j} \neq \infty \rangle^+.$$

Il découle des présentations qu'il existe un morphisme canonique de $A^+(\Gamma)$ dans $A(\Gamma)$ qui envoie σ_i sur σ_i . En particulier $A(\Gamma)$ est le groupe enveloppant de $A^+(\Gamma)$. L. Paris a montré que ce morphisme est injectif [103], ce qui est loin d'être trivial dans le cas général. Dans la suite j'identifie, le monoïde $A^+(\Gamma)$ avec son image dans $A(\Gamma)$. Si S est l'ensemble des sommets de Γ et $T \subseteq S$, le sous-monoïde A_T^+ de $A^+(\Gamma)$ engendré par Σ_T s'appelle un *sous-monoïde parabolique* de $A^+(\Gamma)$. Les notions de normalisateur, quasi-centralisateur et centralisateur peuvent aussi être définies dans $A^+ = A^+(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} N_{A^+}(A_X^+) &= \{g \in A^+ \mid gA_X^+ = A_X g\}; \\ QZ_{A^+}(A_X^+) &= \{g \in A^+ \mid g\Sigma_X = \Sigma_X g\}; \\ Z_{A^+}(A_X^+) &= \{g \in A^+ \mid \forall \sigma \in \Sigma_X, g\sigma = \sigma g\}. \end{aligned}$$

Le fait remarquable, qui fait que les groupes d'Artin-Tits de type sphérique sont mieux compris que les autres, est que leurs monoïdes associés vérifient les conditions de Öre, et que donc tout élément s'écrit sous la forme ab^{-1} avec a et b dans le monoïde. De plus, le sous-groupe $QZ_A(A)$ est un groupe monogène engendré par un élément Δ de A^+ . De ce fait, tout élément de A peut s'écrire ab^{-1} avec a, b dans A^+ et b dans $Z_A(A)$. Le théorème 1.4.2 découle alors de

Théorème 1.4.3. [59] *Soit Γ un graphe de Coxeter (quelconque), et S son ensemble de sommets. Soit $X \subseteq S$.*

(i) $N_{A^+}(A_X^+) = A_X^+ \cdot QZ_{A^+}(A_X^+)$.

(ii) $QZ_{A^+}(A_X^+)$ est précisément l'ensemble des rubans positifs entre X et lui-même.

Le (ii) peut s'exprimer de la façon suivante : un élément g de A^+ est dans le sous-monoïde $QZ_{A^+}(A_X^+)$ si et seulement si il existe une suite finie $X_1 = X, X_2, \dots, X_k, X_{k+1} = X$ de sous-ensembles de S tels qu'on peut écrire $g = g_1 \cdots g_k$ où g_i est un *ruban positif élémentaire* de type (X_i, X_{i+1}) . La définition des rubans positifs élémentaires est algébrique, mais c'est à ce niveau que l'on voit apparaître le lien avec la notion de ruban géométrique introduite dans [51]. Le point (ii) met en lumière un fait important : pour étudier les normalisateurs des sous-groupes, il est naturel d'introduire une catégorie. Notons $\mathcal{C} = \text{Conj}(A)$ le groupoïde dont les objets sont les sous-ensembles de S et dont les morphismes de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de X vers Y sont les éléments g de A tels que $g^{-1}Xg = Y$. On a alors $QZ_A(A_X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Notons $\text{Ribb}(A)$ la sous-groupoïde de $\text{Conj}(A)$ qui possède les mêmes objets et qui est engendrée par les rubans positifs élémentaires. Les théorèmes 1.4.2 et 1.4.3 sont essentiellement une conséquence du fait que $\text{Conj}(A) = \text{Ribb}(A)$ lorsque A est de type sphérique.

J'ai étendu (également dans ma thèse) ces résultats aux groupes d'Artin-Tits de type FC par une voie algébrique [60], en utilisant que la famille des groupes d'Artin-Tits de type FC est la plus petite famille de groupes d'Artin-Tits qui est close par amalgamation au dessus d'un sous-groupe parabolique standard et qui contient les groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Cette propriété permet de faire des récurrences (sur le nombre d'amalgamations utilisées pour construire le groupe) en utilisant, d'une part, que les résultats sont établis pour les groupes d'Artin-Tits de type sphérique et, d'autre part, l'existence de formes normales fournies par la théorie de Bass-Serre sur les produits amalgamés de groupes. Comme dans le cas des groupes d'Artin-Tits de type sphérique, les outils utilisés pour les preuves sont très spécifiques. Une approche plus générale est d'utiliser de nouveau la géométrie et le complexe de Deligne-Charney-Davis $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^\infty)$. C'est cette méthode que j'ai développée dans [64], et qui m'a conduit à énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 1.4.4. [64, Conjecture 1] *Soit Γ un graphe de Coxeter et S son ensemble de sommets.*

(i) *Pour toute partie X incluse dans S , on a*

$$\text{Com}_A(A_X) = \text{N}_A(A_X) = A_X \cdot \text{QZ}_A(A_X)$$

(ii) *Si A_X et A_Y sont deux sous-groupes paraboliques de A et qu'il existe $g \in A$ tel que $g^{-1}A_Yg \subseteq A_X$, alors il existe $Y_1 \subset X$ et $h \in A_X$ tel que*

$$g^{-1}A_Yg = h^{-1}A_{Y_1}h.$$

(iii) *On a $\text{Conj}(A) = \text{Ribb}(A)$.*

J'ai montré dans [59, 60] que la conjecture 1.4.4 est vraie pour les groupes d'Artin-Tits de type sphérique ou FC. Dans [64], je montre que les assertions (i) et (ii) de la conjecture 1.4.4 sont vraies pour les sous-groupes paraboliques de type sphérique dès lors que le complexe de Deligne-Charney-Davis abstrait $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^\infty)$ possède une réalisation géométrique (euclidienne par morceaux) qui est $CAT(0)$. Je montre de plus que l'assertion (iii) est vraie sous l'hypothèse que les sous-complexes des $\Phi(\Gamma_X, \mathcal{S}_X^\infty)$ sont convexes dans $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^\infty)$. Enfin, je montre que la conjecture est vraie pour les graphe de Coxeter de dimension 2, c'est-à-dire tel que tout sous-graphe plein de type sphérique possède au plus 2 sommets. Ces hypothèses sont très raisonnables : la réalisation introduite par Moussong dans sa thèse [98] est $CAT(0)$ pour les groupes d'Artin-Tits de dimension 2, et conjecturalement $CAT(0)$ pour tout les groupes d'Artin-Tits (*cf.* [24, Conjecture 4.4.4]). D'autre part, R. Charney a montré dans [28] que lorsque cette réalisation est effectivement $CAT(0)$, alors les sous-complexes $\Phi(\Gamma_X, \mathcal{S}_X^\infty)$ sont convexes. L'idée générale est la suivante : puisque $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^\infty)$ est $CAT(0)$, deux points quelconques sont reliés par une unique géodésique. Mais, si $gA_Xg^{-1} \cap A_Y$ n'est pas vide, avec X et Y de type sphérique, et si h est dans l'intersection, alors h fixe les sommets gA_X et A_Y dans $\Phi(\Gamma, \mathcal{S}^\infty)$, et donc fixe point par point la géodésique reliant ces deux sommets. cette dernière traverse un certain nombre de polyèdres. A l'intérieur de chaque polyèdre, on est dans un groupe

d'Artin-Tits de type sphérique et on peut utiliser les résultats montrés dans [59]. Maintenant, si on veut supprimer l'hypothèse que A_Y est de type sphérique, ou montrer (iii), on utilise la propriété de convexité. Lorsque A_Y n'est pas de type sphérique, elle permet de montrer que le sous-complexe $\Phi(\Gamma_Y, \mathcal{S}_Y^\infty)$ possède un point x tel que $h \cdot x = x$. Pour montrer (iii), la propriété permet de faire des projections sur les sous-complexes.

1.4.3 La catégorie des rubans

La catégorie des rubans permet de comprendre les quasi-centralisateurs des sous-groupes paraboliques et de décrire comment ces derniers sont conjugués les uns aux autres. Il est donc naturel de vouloir l'étudier. Comme nous l'avons vu ci-dessus, cette catégorie est engendrée (en tant que groupoïde) par les rubans élémentaires. Ce système de générateurs ne suffit cependant pas à la décrire. Comme pour les groupes une première étape dans son étude consiste à en obtenir une présentation. Dans ma thèse, j'avais mis en avant un certain nombre de relations entre les générateurs que sont les rubans élémentaires, mais la structure générale de $\text{Ribb}(A)$ demeurait très mal comprise. La solution à cette question est venue avec l'introduction de la notion de *catégorie de Garside* [11, 88, 41] qui généralise la notion de groupe de Garside [38]. Nous reviendrons plus précisément sur ces notions dans le chapitre 2. Comme je l'ai dit plus haut, les groupes d'Artin-Tits qui sont bien compris du point de vue algébrique sont ceux de type sphérique. L'idée essentielle des structures de Garside est de définir des objets à partir des propriétés essentielles de ces groupes d'Artin-Tits de type sphérique, c'est-à-dire une bonne structure de sous-monoïde (ou de petite catégorie) qui permet de comprendre le groupe (groupoïde) entier. Le résultat principal relatif aux groupes d'Artin-Tits obtenu dans [69] est le suivant :

Théorème 1.4.5. [69, Théorème 1.1] *Pour tout groupe d'Artin-Tits de type sphérique, le groupoïde $\text{Ribb}(A)$ est un groupoïde de Garside.*

Je détermine de plus une présentation de ces groupoïdes et montre que les relations de cette présentation sont des relations de type tresses. La preuve est assez technique et les résultats s'étendent aux groupes de Garside. J'expliquerai cela dans le chapitre 2.2.3.

Chapitre 2

Les paraboliques des structures de Garside

Dans ce chapitre, je considère les structures de Garside. J'explique l'intérêt de cette notion qui généralise celle des groupes d'Artin-Tits. Je commence par expliquer la structure de Garside de ces derniers, puis la notion de LCM-homomorphisme [58, 62] entre groupes d'Artin-Tits. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la notion de sous-groupe parabolique est un outil clef pour l'étude des groupes d'Artin-Tits. Je montrerai comment, à la suite de plusieurs articles, j'ai mis en évidence deux familles de sous-groupes remarquables pour tous groupes (localement) de Garside qui correspondent pour les groupes d'Artin-Tits aux sous-groupes paraboliques standards pour la première famille et aux images des LCM-homomorphismes pour la seconde [67, 69, 74]. Enfin, je terminerai en expliquant comment ces sous-groupes peuvent servir, d'une part, à l'étude des solutions théoriques des équations de Yang-Baxter [31] et, d'autre part, pour l'étude des groupes d'Artin-Tits qui ne sont pas de type sphérique [74].

2.1 La structure de Garside des groupes d'Artin-Tits

2.1.1 Divisibilité et forme normale

Fixons un graphe de Coxeter Γ d'ensemble de sommets $S = \{x_1, \dots, x_n\}$. Rappelons que $W(\Gamma)$ et $A(\Gamma)$ désignent respectivement le groupe de Coxeter et le groupe d'Artin-Tits qui lui est associé.

$$W(\Gamma) = \langle s_1, \dots, s_n \mid s_i^2 = 1; \underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}}, i \neq j \text{ et } m_{i,j} \neq \infty \rangle.$$

$$A(\Gamma) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \mid \underbrace{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \sigma_j \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}}, i \neq j \text{ et } m_{i,j} \neq \infty \rangle.$$

Le sous-monoïde de $A^+(\Gamma)$ possède un certain nombre de propriétés remarquables. Tout d'abord, il est simplifiable (si $abc = ab'c$ alors $b = b'$) et l'homogénéité des relations assure qu'il est noetherien : toute suite de facteurs (ie (w_i) telle que $w_i = u_i w_{i+1} v_i$) stabilise. Les divisibilités à droite et à gauche induisent des ordres partiels, et deux éléments quelconques ont un multiple commun (pour l'une ou l'autre des divisions) si et seulement si ils ont un ppcm. Ceci implique en particulier que tout ensemble d'éléments de $A^+(\Gamma)$ possède un pgcd. Si on pose $\mathbf{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$ et $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, le groupe $W(\Gamma)$ et le monoïde $A^+(\Gamma)$ sont naturellement munis de fonctions longueurs $\ell_{\mathbf{S}}$ et ℓ_{Σ} définies par

$$\ell_{\mathbf{S}}(\omega) = \inf\{k \mid \omega = s_{i_1} \cdots s_{i_k}\}$$

pour ω dans $W(\Gamma)$ et

$$\ell_{\Sigma}(w) = \inf\{k \mid w = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}\}$$

pour w dans $A^+(\Gamma)$. De plus, il existe un morphisme surjectif $p : A(\Gamma) \rightarrow W(\Gamma)$ qui envoie s_i sur σ_i . Le lemme d'échange [21] assure que ce morphisme possède une section $red : W(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma)$ qui envoie $\omega \in W(\Gamma)$ sur l'unique élément w de $A^+(\Gamma)$ tel que $\ell_{\Sigma}(w) = \ell_{\mathbf{S}}(\omega)$ et $\iota(w) = \omega$. Je noterai $Red(\Gamma)$ l'image de $W(\Gamma)$ dans $A^+(\Gamma)$ par cette section. Les éléments de $Red(\Gamma)$ s'appellent les simples de $A^+(\Gamma)$. L'ensemble $Red(\Gamma)$ est essentiel au regard de la théorie de Garside car il permet de construire une forme normale (à gauche ou à droite) sur $A^+(\Gamma)$: tout élément w de $A^+(\Gamma)$ possède un unique plus grand diviseur $\alpha(w)$ (à gauche ou à droite) parmi les simples ; on peut donc décomposer $w \neq 1$ de manière unique sous la forme $w = w_1 \cdots w_k$ avec $w_k \neq 1$ et $w_i = \alpha(w_i \cdots w_n)$ (en utilisant la division à gauche). C'est grâce à cette *forme normale* qu'un certain nombre des résultats évoqués ci-dessus peuvent être démontrés (cf. [94] par exemple). Lorsque le graphe de Coxeter Γ est de type sphérique, le groupe de Coxeter $W(\Gamma)$ est fini et possède un plus grand élément ω_0 pour la longueur $\ell_{\mathbf{S}}$. De ce fait, $Red(\Gamma)$ possède un élément $\Delta = \Delta_{\Gamma}$ qui est le plus grand élément de $Red(\Gamma)$ à la fois pour la divisibilité à gauche et à droite. C'est l'élément de Garside de $A^+(\Gamma)$. En particulier, il possède les mêmes diviseurs à gauche et à droite. Un tel élément est qualifié d'*équilibré*.

Si Γ_X est un sous-graphe complet de Γ d'ensemble de sommets X , alors l'ensemble des simples $Red(\Gamma_X)$ du sous-monoïde parabolique A_X^+ est un sous-ensemble de $Red(\Gamma)$ et

Proposition 2.1.1. *Pour la divisibilité à gauche,*
(i) tout élément de A_X^+ a la même forme normale dans A_X^+ et dans A^+ ;
(ii) deux éléments de A_X^+ ont le même pgcd dans A_X^+ et dans A^+ ;
(iii) deux éléments de A_X^+ ont un ppcm dans A_X^+ si et seulement si ils ont un ppcm dans A^+ . Dans ce cas, ces deux ppcm sont égaux.
Ces résultats sont aussi valables pour la divisibilité à droite.

Ces propriétés importantes ne sont cependant pas caractéristiques des sous-monoïdes paraboliques comme nous allons le voir ci-dessous.

2.1.2 Morphisme entre groupes d'Artin-Tits

Les groupes d'Artin-Tits possèdent d'autres sous-groupes remarquables que les sous-groupes paraboliques, avec des propriétés très proches. Il s'agit des images des LCM-homomorphismes, introduits par J. Crisp dans [34]. Ces morphismes ont été utilisés par J. Crisp et L. Paris pour prouver une fameuse conjecture de Tits sur les groupes d'Artin-Tits [37].

Définition 2.1.2. [34, Def. 1.1] Soit Γ et Γ' deux graphes de Coxeter d'ensembles de sommets respectifs S et S' . Un morphisme de groupes $\varphi : A(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma')$ est un *lcm*-homomorphisme si

- (i) l'image $\varphi(s)$ de tout élément s de $\Sigma(\Gamma)$ est dans $A^+(\Gamma')$ et distinct de 1 ;
- (ii) pour toute paire d'éléments (s, t) de $\Sigma(\Gamma)$, les éléments $\varphi(s)$ et $\varphi(t)$ ont un ppcm pour la division à gauche dans $A^+(\Gamma')$ si et seulement si s et t en ont un dans $A^+(\Gamma)$, et dans ce cas le premier est l'image par φ du second.

Cette définition assure qu'un lcm-homomorphisme est injectif au niveau des monoïdes. La difficulté est de montrer que c'est encore le cas au niveau des groupes. J. Crisp a considéré cette question pour deux sous-familles de lcm-homomorphismes. D'une part, les lcm-homomorphismes qui sont construits à partir des groupes de symétries du graphe [35] et, d'autre part, les LCM-homomorphismes [34].

Définition 2.1.3. [34] et [58, Def. 2.1] Soit Γ et Γ' deux graphes de Coxeter. Soit une application p de l'ensemble des sommets de Γ dans l'ensemble des sous-graphes pleins non vides de Γ' telle que

- (L0) deux sommets distincts ont des images disjointes ;
- (L1) l'image d'un sommet est de type sphérique ;
- (L2) pour tout sous-graphe plein Γ_1 à deux sommets s et t de Γ , on définit un lcm-homomorphisme de $A(\Gamma_1)$ dans $A(\Gamma)$ par $s \mapsto \Delta_{p(s)}$ et $t \mapsto \Delta_{p(t)}$;
- (L3) si les sommets s, t sont reliés par une arête infinie dans Γ , alors pour tout sommet u de $p(s)$, le sous-graphe plein engendré par u et $p(t)$ n'est pas de type sphérique.

On définit un lcm-homomorphisme $\varphi : A(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma')$ par $\varphi(s) = \Delta_{p(s)}$ pour tout sommet s de Γ . Un tel morphisme est appelé un *LCM-homomorphisme*.

Cette définition est essentiellement due à J. Crisp [34]. Mais ce dernier a considéré uniquement les graphes sans liaison ∞ . J'ai étendu sa définition dans [58] en ajoutant la propriété L3 pour prendre en compte les graphes contenant des liaisons ∞ . Il est intéressant de noter que les morphismes d'injection canoniques des sous-groupes paraboliques standards sont des LCM-homomorphismes. Il est donc naturel de se demander quelles sont, parmi les propriétés des sous-groupes paraboliques standards, celles qui restent vraies pour sous-groupes construits comme des images des LCM-homomorphismes. Rappelons qu'un LCM-homomorphisme est injectif au niveau des monoïdes puisque

c'est un lcm-homomorphisme. J'ai montré dans ma thèse [58] que la proposition 2.1.1 s'étend aux images des LCM-homomorphismes.

Théorème 2.1.4. [58] Soit Γ et Γ' deux graphes de Coxeter et $\varphi : A(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma')$ un LCM-homomorphisme.

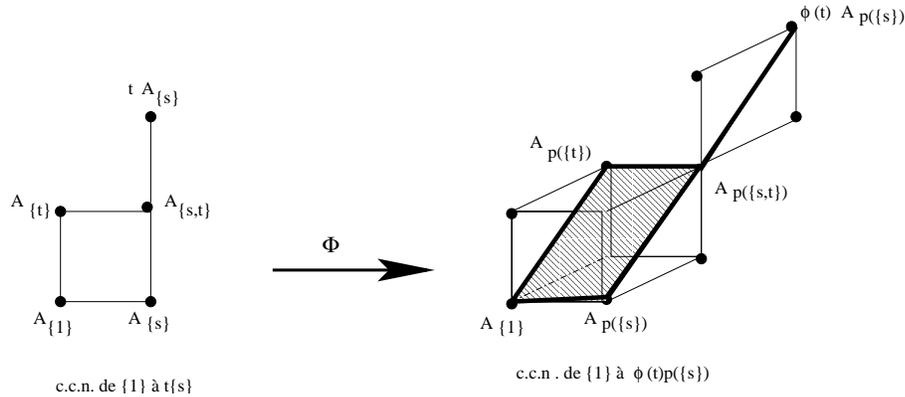
(i) Si w est dans $A^+(\Gamma)$ et sa forme normale est (w_1, \dots, w_n) , alors la forme normale de $\varphi(w)$ est $(\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_n))$.

(ii) L'application φ respecte les ppcm et les pgcd pour la division à droite et à gauche : le pgcd des images de deux éléments de $A^+(\Gamma)$ est l'image de leur pgcd ; de plus ces deux images ont un ppcm si et seulement si les éléments en ont un, et dans ce cas le ppcm des images est l'image du ppcm.

Montrer que ces LCM-homomorphismes sont injectifs au niveau des groupes est, encore une fois, la question difficile. J. Crisp a montré que pour les groupes d'Artin-Tits de type sphérique, c'est toujours le cas. Cela découle facilement du fait que dans ce cas les monoïdes vérifient les conditions de Öre. Dans la cas général la question est ouverte. Il y a cependant un autre cas que j'ai pu traiter :

Théorème 2.1.5. [58] Soit Γ et Γ' deux graphes de Coxeter de type FC. Si $\varphi : A(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma')$ est un LCM-homomorphisme alors il est injectif.

La preuve est une nouvelle fois basée sur le complexe de Deligne. Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour les groupes d'Artin-Tits de type FC, le complexe de Deligne possède une structure de complexe cubique $CAT(0)$ et qu'à tout élément du groupe d'Artin-Tits peut être associé un unique chemin cubique normal (qui est une suite de sommets). L'argument clef consiste à montrer que φ induit une application entre les complexes de Deligne qui envoie le chemin cubique normal d'un élément w sur le chemin cubique normal de son image.



Les images des LCM-homomorphismes vérifient donc un certain nombre de propriétés essentielles des sous-groupes paraboliques des groupes d'Artin-Tits. Ces derniers sont à la base de la construction du complexe de Charney-Davis-Deligne, où ils apparaissent comme des sommets. Une idée naturelle est donc d'utiliser les images des LCM-homomorphismes pour construire un nouveau

complexe sur lequel on peut faire agir le groupe. Cela nécessite d'une part d'être capable de déterminer tous les sous-groupes qui apparaissent comme l'image d'un LCM-homomorphisme et de comprendre comment le groupe agit sur cette famille de sous-groupes. Dans [62] je me suis intéressé à ce second point. Dans [34], J. Crisp a montré que certains LCM-homomorphismes peuvent être construits par *pliage* du graphe ([34, Déf. 4.1] et [62, Déf. 1.11]). Sans entrer dans les détails, cela veut dire que si on peut *plier* le graphe Γ_2 pour obtenir le graphe Γ_1 , alors on peut définir un LCM-homomorphisme $\varphi : A(\Gamma_1) \rightarrow A(\Gamma_2)$. C'est ce type de LCM-homomorphismes que J. Crisp et L. Paris ont utilisés dans [37]. Il faut noter que pour de tels LCM-homomorphismes, l'application p de la définition 2.1.2 vérifie que tout sommet de Γ_2 est dans l'image d'un sommet de Γ_1 . Pour ces LCM-homomorphismes particuliers, j'ai montré que :

Théorème 2.1.6. *Soit Γ_1 et Γ_2 deux graphes de Coxeter de type sphérique et $\varphi : A(\Gamma_1) \rightarrow A(\Gamma_2)$ un LCM-homomorphisme obtenu par pliage. Notons S_1 et S_2 les ensembles de sommets respectifs de $A(\Gamma_1)$ et de $A(\Gamma_2)$. Notons aussi $\text{QZ}_{A(\Gamma_2)}(A(\Gamma_1))$ le quasi-centralisateur de $\varphi(A(\Gamma_1))$ dans $A(\Gamma_2)$, autrement dit,*

$$\text{QZ}_{A(\Gamma_2)}(A(\Gamma_1)) = \{g \in A(\Gamma_2) \mid g^{-1}\varphi(S_1)g = \varphi(S_1)\}.$$

(i) [62, Théorème 0.1] *Si $A(\Gamma_2)$ est indécomposable, alors*

$$\text{QZ}_{A(\Gamma_2)}(A(\Gamma_1)) = \text{QZ}_{A(\Gamma_2)}(A(\Gamma_2)) = \{g \in A(\Gamma_2) \mid g^{-1}S_2g = S_2\}$$

(ii) [62, Prop 3.2 et Cor 3.4] *Supposons que $A(\Gamma_2)$ n'est pas indécomposable. Notons $\Gamma_{2,1}, \dots, \Gamma_{2,k}$ les composantes connexes de Γ_2 . Pour chaque composante connexe $\Gamma_{2,i}$, le morphisme φ induit un LCM-homomorphisme obtenu par pliage*

$$\varphi_i : A(\Gamma_1) \rightarrow A(\Gamma_{2,i})$$

tel que pour chaque élément s de S_1 , on a $\varphi(s) = \prod_i \varphi_i(s)$.

De plus, le groupe $\text{QZ}_{A(\Gamma_2)}(A(\Gamma_1))$ est un sous-groupe de $\text{QZ}_{A(\Gamma_2)}(A(\Gamma_2))$.

Il faut noter que dans (ii), l'ordre du produit n'a pas d'importance. De plus, dans [62], nous donnons un ensemble de générateurs explicite de $\text{QZ}_{A(\Gamma_2)}(A(\Gamma_1))$ et une présentation de groupe associée à cet ensemble. Les preuves de ces résultats utilisent la combinatoire des monoïdes d'Artin-Tits. Ceci explique pourquoi, comme pour la plupart des résultats utilisant cette approche, j'obtiens un résultat uniquement pour les groupes de type sphérique. Je pense, sans avoir vérifié les détails, que les techniques utilisées dans [58] et [64] doivent permettre d'étendre ce résultat aux groupes d'Artin-Tits de type FC.

2.2 Sous-groupes remarquables des groupes de Garside

Dans ce paragraphe je rappelle la notion de groupe de Garside et son intérêt. Puis j'explique comment on peut associer à tout groupe de Garside une famille

de sous-groupes remarquables qui jouent le rôle des sous-groupes paraboliques pour les groupes d'Artin-Tits. J'explique aussi que l'on a une famille équivalente à celle des images des LCM-homomorphismes. Dans le paragraphe 2.3, nous verrons comment cette famille de sous-groupes peut permettre de répondre à certaines questions qui, a priori, n'ont pas de lien avec la théorie de Garside.

2.2.1 Groupes de Garside

En 1969, Garside a résolu le problème de conjugaison dans les groupes de tresses à n brins en étudiant les propriétés du monoïde de tresses positives [52]. La notion de *groupe de Garside* a été introduite dans [38] par P. Dehornoy et L. Paris. L'idée était d'extraire les propriétés minimales essentielles des groupes d'Artin-Tits de type sphérique qui permettent de prouver la plupart de leurs propriétés. Cette idée a pu initialement apparaître aux non-spécialistes comme un formalisme sans grand intérêt car aucun exemple significatif autre que ceux des groupes d'Artin-Tits de type sphérique n'était connu. Cependant, les travaux ont été poursuivis [13, 14, 26, 39, 88] et ont conduit, d'une part, à une généralisation de la notion de groupe de Garside et à l'introduction de la notion de catégorie de Garside et, d'autre part, à la mise en lumière d'un certain nombre d'exemples de groupes de Garside qui ne sont pas des groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Les deux exemples d'application de cette théorie qui à mes yeux sont à ce jour les plus significatifs sont les résultats obtenus par D. Bessis [11] et F. Digne [42]. Dans [11], la notion de catégorie de Garside est un outil clef pour prouver la conjecture du $K(\pi, 1)$ pour les arrangements d'hyperplans associés aux groupes de réflexions complexes. Dans [42], les groupes de tresses affines (qui sont des groupes d'Artin-Tits non de type sphérique) sont munis d'une structure de groupe de Garside. Ceci permet, en particulier de résoudre le problème du mot pour ces groupes. On peut penser que cette idée peut être appliquée avec succès à d'autres groupes d'Artin-Tits. C'est ce qui est fait dans [43] et sera fait dans [74]. Nous revenons sur ce point dans la partie 2.3. On peut considérer que la définition actuelle de groupe de Garside est définitive. Par $\text{Div}(a)$, je note l'ensemble des *facteurs* d'un élément a d'un monoïde M . Autrement dit, $\text{Div}(a) = \{c \in M \mid \exists b, d \in M, a = bcd\}$. On définit de façon évidente les facteurs gauches et les facteurs droits. Je rappelle qu'un élément Δ est dit *équilibré* si tout facteur est à la fois un facteur gauche et un facteur droit. Je rappelle que M est un monoïde simplifiable et noetherien alors les divisions à droite et à gauche induisent des ordres partiels sur le monoïde M .

Définition 2.2.1. (i) Un monoïde *localement de Garside* est un monoïde simplifiable et noetherien tel que, pour chacune des divisibilités à droite et à gauche, deux éléments possèdent un multiple commun si et seulement si ils ont un ppcm. (ii) Un *élément de Garside* d'un monoïde localement de Garside est un élément équilibré dont l'ensemble des facteurs engendre le monoïde. Si un tel élément existe, on dit que le monoïde est un *monoïde de Garside*. (iii) Un groupe $G(M)$ est (*localement*) *de Garside* si il est le groupe enveloppant d'un monoïde (localement) de Garside M .

Bien entendu, les groupes d'Artin-Tits sont localement de Garside et les groupes d'Artin-Tits de type sphérique sont ceux qui sont *canoniquement* de Garside. De nombreux autres exemples existent. Par exemple, les groupes libres de rang fini [12], les groupes de tresses affines [42], ainsi que toute une famille de groupes qui proviennent des solutions théoriques de l'équation Yang-Baxter [55, 32] sont des groupes de Garside.

Comme les monoïdes d'Artin-Tits de type sphérique, les monoïdes de Garside vérifient les conditions de Öre et se plongent donc dans leurs groupes de Garside associés. La preuve de l'extension de ce résultat à tous les groupes de Garside est loin d'être évidente et la question est pour l'instant complètement ouverte. Rappelons que dans le cas particulier des groupes d'Artin-Tits, la question est restée longtemps ouverte avant d'être résolue par L. Paris [103].

Comme pour les monoïdes d'Artin-Tits de type sphérique, dans un monoïde de Garside M , les éléments de $\text{Div}(\Delta)$ s'appellent les éléments *simples* du monoïde. On peut également construire des formes normales (à gauche ou à droite). Tout élément w de M possède un unique plus grand diviseur $\alpha(w)$ (à gauche ou à droite) parmi les simples : c'est le pgcd de w et Δ (à gauche ou à droite) et on peut donc décomposer $w \neq 1$ de manière unique sous la forme $w = w_1 \cdots w_k$ avec $w_k \neq 1$ et $w_i = \alpha(w_i \cdots w_n)$ (en utilisant la division à gauche).

2.2.2 Sous-groupes paraboliques et sous-groupes de Garside

Comme je l'ai expliqué plus haut, la famille des sous-groupes paraboliques (standards) d'un groupe d'Artin-Tits est un outil essentiel pour son étude et pour l'étude du Coxeter associé. L'idée qui a conduit à l'introduction des groupes (localement) de Garside était de construire un outil qui permet d'étudier des groupes qui ressemblent par leur structure aux groupes d'Artin-Tits (de type sphérique). De ce fait, il est naturel de se demander si les groupes localement de Garside possèdent une famille de sous-groupes remarquables qui jouent le rôle des sous-groupes paraboliques standards. Pour réponse à cette question, il faut savoir quelles sont parmi les propriétés importantes des sous-groupes paraboliques celles que l'on veut conserver dans le cadre des groupes localement de Garside. Quatre propriétés viennent immédiatement à l'esprit. Si A est un groupe d'Artin-Tits dont l'ensemble générateur est S alors

- (1) Tout sous-groupe parabolique standard A_X est engendré par une partie X de S .
- (2) Tout sous-groupe parabolique standard A_X est canoniquement un groupe d'Artin-Tits. Autrement dit le sous-monoïde A_X^+ engendré par X est un monoïde d'Artin-Tits dont le groupe enveloppant est A_X .
- (3) La structure d'Artin-Tits de tout sous-monoïde parabolique standard A_X^+ est compatible avec celle de A^+ :
 - (a) les formes normales sont les mêmes ;

- (b) les pgcd dans A_X^+ et dans A^+ de deux éléments de A_X^+ sont égaux ;
 - (c) les ppcm dans A_X^+ et dans A^+ de deux éléments de A_X^+ existent simultanément et dans ce cas sont égaux.
- (4) la famille des sous-groupes paraboliques standards est close par intersection.

Une bonne définition de sous-groupe parabolique d'un groupe localement de Garside doit donc permettre de retrouver ces propriétés (ou dans (2) et (3), *Artin-Tits* est remplacé par *localement de Garside*).

Dans un monoïde quelconque, un *atome* est un élément dont les seuls facteurs sont l'élément neutre et lui-même. Un monoïde localement de Garside est noetherien et est donc engendré par ses atomes. Dans le cas d'un monoïde d'Artin-Tits, les atomes sont les générateurs canoniques de sa présentation. Une idée naturelle est donc de vouloir définir un sous-groupe parabolique standard d'un groupe localement de Garside comme un sous-groupe engendré par un ensemble quelconque d'atomes du monoïde associé. On peut voir assez facilement que cette définition n'est pas satisfaisante dans le cadre des groupes localement de Garside : le groupe de présentation $\langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$ est un groupe de Garside mais l'intersection du sous-groupe engendré par a et du sous-groupe engendré par b est le sous-groupe engendré par a^2 . Une telle définition ne garantirait donc pas la propriété (4). Ainsi seuls certains ensembles d'atomes doivent être associés à un sous-groupe parabolique standard. Dans [67], je me suis intéressé au cas particulier des groupes de Garside, c'est-à-dire à ceux qui correspondent aux groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Les raisons qui expliquent cette restriction dans l'approche du problème sont multiples. À cette période, aucun exemple de groupes localement de Garside, non de Garside, était connu, hormis les groupes d'Artin-Tits de type non sphérique. De plus, il me semblait prématuré de vouloir considérer le cas général alors que celui-ci était encore mal compris. Ainsi, l'étude du cas des groupes de Garside m'apparaissait comme plus simple, plus motivé, et une étape nécessaire avant de pouvoir envisager le cas général de façon satisfaisante. L'idée clef qui m'a guidé était la suivante : dans un groupe d'Artin-Tits de type sphérique A , tout sous-groupe parabolique standard A_X est de type sphérique ; ce sous-groupe est donc uniquement défini par son ensemble d'atomes X , mais aussi son élément de Garside Δ_X , qui est équilibré dans le monoïde A^+ . Mon idée de base a donc été d'essayer de définir les sous-groupes paraboliques standard à partir de leur élément de Garside plutôt qu'à partir de leur ensemble d'atomes. Cela m'a conduit à la définition suivante :

Définition 2.2.2. [67, Def. 2.3] Soit M un monoïde de Garside. Notons Δ l'élément de Garside de la structure de Garside et S l'ensemble des atomes de M . soit $G(M)$ le groupe de Garside associé à M .

(i) Soit δ un élément équilibré contenu dans $\text{Div}(\Delta)$. Notons $\text{Supp}(\delta)$ le *support* de δ c'est-à-dire l'ensemble $\text{Div}(\delta) \cap S$. On dira que le sous-monoïde M_δ est un *sous-monoïde parabolique standard* de M si $\text{Div}(\delta) = \text{Div}(\Delta) \cap M_\delta$.

(ii) Un sous-groupe parabolique standard de $G(M)$ est un sous-groupe engendré par un sous-monoïde parabolique standard de M .

Il faut tout d'abord noter que dans [67] la définition est donnée pour les groupes *quasi-Garside*. Ce terme correspond à la définition de groupe de Garside que je donne ici. Ceci est dû au fait qu'à l'époque de la rédaction de l'article, le qualificatif *Garside* était réservé aux groupes quasi-Garside dont le nombre d'éléments simples est fini. Depuis le terme quasi-Garside a été abandonné et la terminologie de Garside étendue à ces groupes.

Cette définition répond notre souhait initial : les propriétés (1)-(4) demeurent valables pour cette famille de sous-groupes [67]. De plus, dans le cas particulier des groupes d'Artin-Tits de type sphérique, munis de leurs structures de Garside canoniques, les deux notions de sous-groupes paraboliques standards coïncident. Enfin, on montre dans [67] que deux autres propriétés des sous-groupes paraboliques standards des groupes d'Artin-Tits restent valables dans ce contexte :

Proposition 2.2.3. *Soit M un monoïde de Garside et H un sous-monoïde parabolique standard de M .*

(i)[67, Prop. 1.15] *Posons $\text{QZ}_{G(M)}(H) = \{g \in G(M) \mid g^{-1}Hg = H\}$. Alors,*

$$N_{G(M)}(G(H)) = G(H) \times \text{QZ}_{G(M)}(H)$$

où $N_{G(M)}(G(H))$ désigne le normalisateur de $G(H)$ dans $G(M)$.

(ii)[67, Prop. 2.5] *Le sous-monoïde H est clos par facteurs dans M .*

Cette définition est donc très satisfaisante. Elle possède cependant deux défauts. Le premier est qu'elle est basée sur l'existence d'un élément de Garside et qu'on ne peut donc espérer l'étendre telle qu'elle aux groupes localement de Garside. Le second défaut est qu'elle repose sur une condition technique (le fait que l'égalité $\text{Div}(\delta) = \text{Div}(\Delta) \cap M_\delta$ doit être vraie) qui est inesthétique au regard de la définition pour les groupes d'Artin-Tits. Comme nous le verrons dans la section 2.3, la résolution de ces deux défauts permet le passage du cas Garside au cas localement Garside. La propriété 2.2.3(ii) ci-dessus, qui peut paraître anodine tellement elle est triviale dans le cas des groupes d'Artin-Tits, s'avère a posteriori le point crucial. Ceci n'est finalement pas très surprenant car dans un groupe d'Artin-Tits, c'est cette propriété qui caractérise les images des LCM-homomorphismes qui sont des sous-groupes paraboliques standards.

Revenons à l'exemple $G(M) = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$, où le monoïde M possède la même présentation, mais en tant que présentation de monoïde. Le sous-groupe G_a engendré par a n'est pas un sous-groupe parabolique standard mais il possède cependant beaucoup de bonnes propriétés : c'est un groupe de Garside dont le monoïde associé est $M_a = M \cap G_a = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ce monoïde M_a est un sous-treillis de M pour les divisions à gauche et à droite, il est clos par ppcm et pgcd. Enfin si pour élément de Garside de M_a on prend a^2 , alors les formes normales dans M_a et M d'un élément de M_a sont les mêmes. Le sous-groupe G_b engendré par b vérifie aussi ces propriétés, et il en est de même pour leur intersection, qui est le groupe G_{a^2} engendré par a^2 . De plus, a, b et a^2 sont équilibrés dans M . Dans le cas des groupes d'Artin-Tits, les sous-groupes qui vérifient ces propriétés sont les images des LCM-homomorphismes [67]. Nous sommes ici dans un cas particulier qui ne peut arriver pour les groupes d'Artin-Tits de type sphérique : dans ce cadre toute image d'un LCM-homomorphisme

qui est engendrée par des atomes est nécessairement un sous-groupe parabolique standard. Dans [67], j'introduis la famille des sous-groupes paraboliques standards d'un groupe de Garside comme une sous-famille de sous-groupes, que j'ai appelés sous-groupes *de Garside*. Les groupes G_a, G_b et G_{a^2} en sont des exemples.

Définition 2.2.4. [67, Déf. 1.6] Soit M un monoïde de Garside d'élément de Garside Δ et H un sous-monoïde de M .

(i) On dit que H est un sous-monoïde de Garside si H^+ est un sous-treillis de M clos par ppcm, pgcd et par pgcd avec Δ (à gauche et à droite).

(ii) Un sous-groupe de $G(M)$ est *de Garside* si il est engendré par un sous-monoïde de Garside.

Proposition 2.2.5. [67]

1. *Tout sous-groupe parabolique standard d'un groupe de Garside est un sous-groupe de Garside.*
2. *Dans un groupe d'Artin-Tits de type sphérique, toute image d'un LCM-homomorphisme est un sous-groupe de Garside.*
3. *Dans un groupe d'Artin-Tits de type sphérique $G(M)$, un sous-groupe de Garside $G(N)$ est l'image d'un LCM-homomorphisme si et seulement si les atomes de N sont équilibrés dans M .*
4. *Dans un groupe de Garside, la famille des sous-groupes de Garside est close par intersection.*

Cette proposition dit en particulier que les propriétés (2),(3) et (4) énoncées plus haut pour la famille des sous-groupes paraboliques, s'étendent aux sous-groupes de Garside. On peut donc envisager d'utiliser cette famille de sous-groupes, comme celle des sous-groupes paraboliques, pour construire des complexes simpliciaux sur lesquels on peut faire agir le groupe. Cependant ce complexe simplicial n'a pas une structure de complexe de cube.

2.2.3 Catégorie de Garside

Dans la section précédente nous avons vu que la notion de groupe de Garside est un cas particulier de la notion de groupe localement de Garside. C'est aussi un cas particulier d'une autre notion importante, que nous avons déjà évoquée, celle de groupoïde de Garside : un groupe est un groupoïde avec un seul objet. La définition d'une catégorie de Garside est due à D. Bessis [13] :

Définition 2.2.6. (i) Une structure de *catégorie de Garside* est une paire (\mathcal{C}, Δ) telle que :

- \mathcal{C} est une petite catégorie équipée d'un automorphisme Φ tel que Δ est une transformation naturelle du foncteur identité $Id : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ à Φ ;
- la catégorie \mathcal{C} est noetherienne et simplifiable ;
- pour chaque objet x de \mathcal{C} , les ensembles $\mathcal{C}_{x \rightarrow \cdot}$ and $\mathcal{C}_{\cdot \rightarrow x}$ des morphismes partant de x et arrivant à x sont des treillis pour les ordres partiels induits par les divisibilités à gauche et à droite, respectivement ;

- pour tous objets x, y de \mathcal{C} et tout atome v de \mathcal{C} contenu dans $\mathcal{C}_{x \rightarrow y}$, il existe un morphisme \bar{v} tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\Delta(x)} & \Phi(x) \\
 v \downarrow & \nearrow \bar{v} & \downarrow \Phi(v) \\
 y & \xrightarrow{\Delta(y)} & \Phi(y)
 \end{array}$$

Dans ce cas, on dit que la catégorie \mathcal{C} est une catégorie *de Garside*.

- (ii) Un groupoïde *de Garside* $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ est le groupoïde des inverses formels d'une catégorie de Garside \mathcal{C} .

Au regard de la définition d'un groupe de Garside, cette définition est assez naturelle : dans un tel groupe, l'importance de l'élément de Garside provient du fait qu'il réalise un automorphisme intérieur du monoïde, et qu'en particulier il permute l'ensemble des atomes. Dans le contexte des catégories, une transformation naturelle correspond à la réalisation d'un automorphisme intérieur dans le contexte des groupes.

Comme expliqué dans la section 1.4.2, l'étude des sous-groupes paraboliques d'un groupe d'Artin-Tits conduit à introduire la notion de catégorie des rubans. Dans ma thèse j'avais montré que, pour les groupes d'Artin-Tits de type sphérique, celle-ci est engendrée par les rubans positifs élémentaires. Cette catégorie restait cependant mal comprise. Au cours de mon post-doc à Sydney, j'ai commencé à travailler sur la notion de sous-groupe parabolique d'un groupe de Garside, et à étudier les propriétés des catégories de rubans. L'article [79] de R. Howlett a été pour moi une grande source d'inspiration. Dans celui-ci, des notions équivalentes sont étudiées dans le contexte des groupes de Coxeter. R. Howlett y étudie un certain groupoïde qui joue le rôle de la catégorie des rubans. Il a en particulier montré que certains sous-groupes de cette catégorie sont des groupes de Coxeter. J'ai alors réalisé qu'un certain nombre de propriétés des groupes d'Artin-Tits pouvaient être transférées à la catégorie des rubans. Ceci m'a conduit à la prépublication [75], qui contient une partie des idées essentielles présentes dans les articles [67] et [69]. A cette époque, la notion de catégorie de Garside n'avait pas encore été introduite. Ceci explique en partie que les résultats et les preuves obtenus dans [75] apparaissaient comme très techniques et peu lisibles. Avec l'introduction de la notion de catégorie de Garside, les énoncés ont pu être présentés de façon plus compréhensibles, et les preuves ont pu être simplifiées et généralisées. A tout groupe de Garside $G(M)$, on peut associer une *catégorie de rubans* $\text{Ribb}(G(M))$ dont les objets sont les sous-groupes paraboliques et dont les morphismes entre deux sous-groupes paraboliques sont les éléments de $G(M)$ qui envoient par conjugaison le monoïde du premier sous-groupe sur le monoïde du second. Un ruban positif est un ruban qui est dans M . Dans le cas des groupes d'Artin-Tits de type sphérique, cette catégorie est la groupoïde $\text{Conj}(G(M))$ que j'ai présenté dans la section 1.4.2.

Il s'avère que partant d'un groupe de Garside, il est facile de construire un groupoïde de Garside :

Théorème 2.2.7. [69] *Pour tout groupe de Garside avec une ν -structure, la catégorie des rubans est un groupoïde de Garside dont la catégorie de Garside associée est la sous-catégorie des rubans positifs.*

Il faut noter que dans le cas des groupes d'Artin-Tits de type sphérique, ce résultat a également été obtenu par F. Digne et J. Michel [41]. La propriété d'avoir une ν -structure [69, Déf 3.12] est une condition technique qui est vérifiée par les groupes d'Artin-Tits de type sphérique et par un certain nombre d'exemples de groupes de Garside. Cette condition a été motivée par deux idées. La première est de pouvoir reproduire la méthode utilisée dans le cas des groupes d'Artin-Tits pour un groupe de Garside $G(M)$ qui possède une ν -structure : essentiellement, à tout atome s de M et à tout sous-groupe parabolique standard G_X , on peut associer un *ruban positif élémentaire* $\nu(X, s)$ tel que si s divise à gauche dans M un ruban positif, alors $\nu(X, s)$ divise aussi à gauche le ruban dans M . On demande aussi une propriété similaire pour la division à droite. Il faut noter que, contrairement au cas des groupes d'Artin-Tits, il existe des groupes de Garside avec une ν -structure où s ne divise pas (à gauche) le ruban $\nu(X, s)$. La seconde est que les propriétés définissant la ν -structure doivent étendre les propriétés d'une certaine fonction τ qui existe pour tous les groupes de Garside, et qui décrit le quasi-centralisateur d'un groupe de Garside :

Théorème 2.2.8. [109, 69] *Soit M un monoïde de Garside. Notons S son ensemble d'atomes.*

(i) *Le monoïde $\text{QZ}(M) = \{g \in M \mid gS = Sg\}$ est un monoïde commutatif libre. De plus, il existe une projection $\tau : M \rightarrow \text{QZ}(M)$, $g \mapsto \tau_g$ telle que*

1. *L'ensemble $\{\tau_s \mid s \in S\}$ est une base libre de $\text{QZ}(M)$ (où certains τ_s sont éventuellement égaux);*
2. *L'application τ respecte les divisibilités à gauche et à droite. En particulier si $s \in S$ divise (à gauche ou à droite) $g \in \text{QZ}(M)$ alors τ_s divise g (à gauche ou à droite);*
3. *L'application τ est un homomorphisme de semi-treillis pour les divisions à gauche et à droite; en particulier, $\tau_{g \vee h} = \tau_g \vee \tau_h$ pour tout g, h dans M .*

(ii) *Le groupe $\text{QZ}(G) = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$ est un groupe libre commutatif dont l'ensemble $\{\tau_s \mid s \in S\}$ est une base libre (où certains τ_s sont éventuellement égaux).*

Ce résultat a été prouvé par M. Picantin [109] pour les groupes de Garside dont l'ensemble des simples est fini. J'ai étendu dans [69, Sec. 4.1] son résultat à tous les groupes de Garside. La méthode utilisée dans [69] pour prouver le résultat est essentiellement la même que dans [109]. Un certain nombre d'arguments de finitude ne peuvent plus être appliqués et doivent être remplacés par des arguments utilisant la propriété de noetherianité. Avec nos notations, si s appartient à X , alors $\tau_s = \nu(X, s)$ dans le sous-monoïde parabolique M_X .

Mes travaux dans [69] m'ont permis d'obtenir deux résultats supplémentaires. Le premier est une présentation des catégories de rubans avec pour ensemble de générateurs les rubans positifs élémentaires. Ce résultat n'était pas connu, même dans le cas du groupe de tresses. Un point intéressant selon moi est que les relations de présentation des groupoïdes de rubans des groupes d'Artin-Tits de type sphérique sont des relations du type tresses. En particulier les relations entre les atomes contenus dans le groupe au sommet G_X sont du type

$$\underbrace{\nu(X, t)\nu(X, s)\nu(X, t)\cdots}_{M_{X,s,t} \text{ termes}} = \underbrace{\nu(X, s)\nu(X, t)\nu(X, s)\cdots}_{M_{X,s,t} \text{ termes}}$$

Poursuivant l'étude des similiarités entre les groupes d'Artin-Tits de type sphérique et les groupes de Garside avec une ν -structure, j'ai généralisé le théorème 1.4.2(i) au contexte des groupes de Garside :

Théorème 2.2.9. *Soit un groupe de Garside $G(M)$ que l'on suppose muni d'une ν -structure. Considérons le groupoïde $\mathcal{N}(G(M))$ dont les objets sont les sous-groupes paraboliques standards de $G(M)$ et dont l'ensemble des morphismes de $G(N_1)$ à $G(N_2)$ est $\{g \in G(M) \mid g^{-1}G(N_1)g = G(N_2)\}$. Soit $\mathcal{P}(G(M))$ le sous-groupoïde complètement disconnecté de $\mathcal{N}(G(M))$ qui possède les mêmes objets, et dont le groupe au sommet $G(N)$ est le groupe $G(N)$. Alors*

$$\mathcal{N}(G(M)) = \mathcal{P}(G(M)) \cdot \text{Ribb}(G(M)).$$

Le produit ci-dessus est un produit de catégories, qui dans ce contexte est évident à définir. En fait, dans [69] je montre de manière plus précise que l'on peut remplacer $\text{Ribb}(G(M))$ par un sous-groupoïde $\text{Ribb}^\nu(G(M))$ tel que l'on est $\mathcal{N}(G(M)) = \mathcal{P}(G(M)) \bowtie \text{Ribb}^\nu(G(M))$. Le symbole \bowtie désigne le produit de Zappa-Szép de ces deux catégories tel que défini dans [20]. La différence entre ces deux décompositions réside dans le fait que dans le premier produit les décompositions ne sont pas uniques, alors qu'elles le sont dans le second.

2.3 Applications

Chercher à construire une notion de sous-groupe parabolique d'un groupe de Garside est naturel. D'une part, c'est une notion essentielle pour l'étude des groupes d'Artin-Tits. D'autre part, l'idée directrice à l'origine de la définition des groupes de Garside est de capturer les propriétés fondamentales des groupes d'Artin-Tits. D'un autre côté, on peut se poser la question de l'intérêt d'introduire une nouvelle notion si celle-ci est sans application. Les travaux qui m'ont conduit à publier les articles [62] et [67] n'étaient effectivement motivés que par le soucis d'étendre aux groupes de Garside la notion de sous-groupe parabolique. L'idée était que l'importance de ces sous-groupes pour les groupes d'Artin-Tits permettait d'espérer que leur généralisation aux groupes de Garside conduirait à de nouvelles applications. Dans deux travaux récents et en coopération [31] et [74], je montre que ces sous-groupes permettent d'utiliser

la théorie des groupes de Garside, d'une part, pour l'étude des solutions des équations de Yang-Baxter et, d'autre part, pour l'étude de certains groupes d'Artin-Tits qui ne sont ni de type sphérique, ni de type FC.

2.3.1 Équation de Yang-Baxter

L'équation de Yang-Baxter Quantique occupe une place importante dans le domaine de la physique mathématique. Ceci explique que l'étude des solutions de cette équation est l'objet de nombreux articles. Pour un espace vectoriel V cette équation est

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$$

sur $V \otimes V \otimes V$ dont l'indéterminée est une transformation linéaire $R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$. Ici R^{ij} signifie que l'action de R est sur les i ème et j ème composantes.

Soit V un espace vectoriel de base X , et $S : X \times X \rightarrow X \times X$ une bijection. La paire (X, S) est appelée un *ensemble-solution théorique* de l'équation si l'opérateur linéaire $R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ induit par S en est une solution. La question de la classification de ces ensembles-solutions théoriques a été posée par Drinfeld dans [44] et a été depuis l'objet de nombreux articles [22, 32, 49, 53, 54, 55]. Dans [49], Etingof, Soloviev et Schedler se sont intéressés aux ensembles-solutions théoriques finis qui sont *symétriques* et *non-dégénérés*. Ils ont en particulier introduit la notion de *sous-ensemble invariant* comme un outil pour leur classification. De plus, ils ont associé un groupe à tout ensemble-solution théorique fini, appelé le *groupe de structure*, défini par la présentation

$$\langle X \mid xy = zt \text{ si } S(x, y) = (z, t) \rangle.$$

Lorsque l'ensemble-solution théorique est fini symétrique et non-dégénéré, ce groupe possède naturellement une structure de groupe de Garside d'un type particulier [32]. L'ensemble des atomes du monoïde associé est l'ensemble X . F. Chouraqui a montré [32], qu'inversement, tout groupe de Garside de ce type est le groupe de structure d'un ensemble-solution théorique fini symétrique et non-dégénéré. Le lien entre l'approche développée dans [49] et la théorie de Garside est donné par la proposition suivante :

Théorème 2.3.1. [31, théorème 1] *Soit X un ensemble fini et (X, S) un ensemble-solution théorique fini symétrique et non-dégénéré. Soit G son groupe de structure. Pour $Y \subseteq X$, notons G_Y le sous-groupe de G engendré par Y . L'application $Y \mapsto G_Y$ induit une bijection entre les sous-ensembles invariants de (X, S) et les sous-groupes paraboliques standards de G .*

Pour classifier les ensembles-solutions théoriques finis symétriques et non-dégénérés, Etingof, Soloviev et Schedler ont introduit dans [49] la notion de *solution décomposable*. Il s'agit d'un ensemble-solution théorique qui est le produit croisé de deux sous-ensembles invariants. Dans [31], guidé par la notion de pliage de graphe de Coxeter, dont nous avons parlé dans le paragraphe 2.1.2, nous avons utilisé les sous-groupes de Garside introduits dans [67] pour définir un nouvel outil pour classifier les ensembles-solutions : la notion de *solution*

pliable. Nous avons montré que toute solution décomposable est pliable mais que la réciproque est fausse. L'exemple suivant permet de comprendre la notion de solution pliable et le lien avec les LCM-homomorphismes obtenus par pliage :

Exemple 2.3.2. Considérons l'ensemble-solution théorique (X, S) tel que $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et les relations de la présentation du groupe de structure $G(X, S)$ sont

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2^2; & x_1x_2 &= x_3x_4; & x_1x_3 &= x_4x_2; \\ x_3^2 &= x_4^2; & x_2x_4 &= x_3x_1; & x_2x_1 &= x_4x_3. \end{aligned}$$

L'élément de Garside de $G(X, S)$ est x_1^4 , et $x_1^4 = x_2^4 = x_3^4 = x_4^4$. De plus, $G(X, S)$ n'a pas de sous-groupe parabolique standard, et l'ensemble solution (X, S) est donc indécomposable. L'ensemble $\{x_1, x_2\}$ engendre un sous-groupe de Garside dont l'élément de Garside est x_1^2 . De même, l'ensemble $\{x_3, x_4\}$ engendre un sous-groupe de Garside dont l'élément de Garside est x_3^2 . De plus, le sous-groupe engendré par x_1^2 et x_3^2 est un sous-groupe de Garside dont l'élément de Garside est x_1^4 . Il est isomorphe au groupe de Garside $\langle x, y \mid x^2 = y^2 \rangle$ via l'isomorphisme $x \mapsto x_1^2$ et $y \mapsto x_3^2$. Enfin le groupe $\langle x, y \mid x^2 = y^2 \rangle$ est le groupe de structure d'un ensemble-solution théorique (X', S') où $X' = \{x, y\}$. On en déduit que (X, S) est pliable, et (X', S') est un pliage de (X, S) .

2.3.2 Groupe localement Garside de type FC

Revenons un instant aux groupes d'Artin-Tits. Comme déjà expliqué, ils sont assez mal compris en général. Par exemple, le problème du mot et le problème de torsion sont ouverts. Hors mis quelques exemples singuliers, seuls deux grandes familles de groupes d'Artin-Tits sont relativement bien comprises : celle des groupes de type sphérique et celle des groupes de type FC. La motivation à l'origine de la notion de groupe de Garside était de construire une théorie permettant d'appliquer à d'autres groupes les techniques utilisées pour comprendre les groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Cette idée s'est révélée fructueuse puisqu'elle a, par exemple, permis de résoudre les problèmes de mot et de torsion dans certains groupes d'Artin-Tits de type affine [42, 43]. F. Digne et J. Michel ont introduit la notion de groupe localement de Garside, qui généralise à la fois la notion de groupe de Garside et la notion de groupe d'Artin-Tits. Malheureusement, cette famille souffre du même défaut que celle des groupes d'Artin-Tits de type quelconque : si les monoïdes localement de Garside sont bien compris, les groupes localement Garside le sont beaucoup moins. On ignore si le morphisme canonique $M \rightarrow G(M)$ est injectif et aucune solution au problème du mot ou de torsion n'est connue, hors mis le cas des groupes de Garside. Dès lors, il est assez naturel de se demander si une théorie des groupes localement de Garside *de type FC* existe et si cette théorie peut, par exemple, permettre de résoudre le problème de mot et de torsion pour certaines nouvelles familles de groupes d'Artin-Tits. C'est sur ce projet que L. Paris et moi sommes en train de travailler. Celui n'étant pas encore complètement abouti, je ne peux le présenter en détails dans ce mémoire. Cependant je souhaite en présenter les grandes lignes et indiquer quelques résultats. La méthode algébrique pour étudier les groupes

d'Artin-Tits de type FC a été développée principalement dans [3]. Elle est basée sur le fait que la famille des groupes d'Artin-Tits de type FC est la plus petite famille de groupes d'Artin-Tits qui est close par amalgamation au dessus d'un sous-groupe parabolique standard et qui contient les groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Par mimétisme, on peut poser la définition suivante :

Définition 2.3.3. [74] La classe des *groupes localement de Garside de type FC* est la plus petite classe de groupes localement de Garside contenant les groupes de Garside et fermée par produit amalgamé au dessus d'un sous-groupe parabolique standard.

Bien entendu, pour que cette définition ait un sens, il faut, d'une part, être capable de définir une bonne notion de sous-groupe parabolique standard d'un groupe localement de Garside et, d'autre part, être capable de montrer que le produit amalgamé de deux groupes localement de Garside au dessus d'un sous-groupe parabolique standard est un groupe localement de Garside.

Le premier point est relativement facile, une fois analysés les résultats obtenus dans [67]. On peut en effet remarquer qu'il en découle facilement que

Proposition 2.3.4. *Soit M un monoïde de Garside et N un sous-monoïde. Alors N est parabolique si et seulement si N est clos par facteurs dans M , par ppcm à gauche et par ppcm à droite. De plus, dans ce cas, le morphisme canonique $G(N) \rightarrow G(M)$ est injectif et $G(N) \cap M = N$.*

On est alors amené à poser la définition suivante :

Définition 2.3.5. Soit M un monoïde localement de Garside. Soit N un sous-monoïde de M . On dit le sous-monoïde N est *parabolique* si N est clos par facteurs, par ppcm à gauche et par ppcm à droite dans M . Un sous-groupe de $G(M)$ est *parabolique standard* si il est engendré par l'image par le morphisme canonique $M \rightarrow G(M)$ d'un sous-monoïde parabolique.

Il est facile de voir qu'un sous-monoïde parabolique d'un monoïde localement de Garside est localement de Garside. En fait, tout sous-monoïde clos par facteurs est un monoïde localement de Garside. Il est légitime de conjecturer que

Conjecture 2.3.6. *Soit M un monoïde localement de Garside. Supposons que le morphisme $M \rightarrow G(M)$ soit injectif.*

1. *Si le sous-monoïde N est parabolique, alors le morphisme $G(N) \rightarrow G(M)$ est injectif, et on a $G(N) \cap M = N$.*
2. *Si les sous-monoïdes N_1 et N_2 sont paraboliques, alors $N_1 \cap N_2$ l'est aussi, et $G(N_1) \cap G(N_2) = G(N_1 \cap N_2)$.*

L'hypothèse $M \rightarrow G(M)$ injectif est a priori restrictive, mais est conjecturalement toujours vérifiée. Il faut noter que la clôture par ppcm peut apparaître comme inutile puisqu'un sous-monoïde clos par facteurs est un monoïde localement de Garside, mais les propriétés énoncées dans la conjecture 2.3.6 sont fausses si on remplace *parabolique* par *clos par facteurs*.

Il découle de [67] que lorsque M est de Garside cette conjecture est vraie. Avant de continuer, deux questions se posent : si M est un monoïde d'Artin-Tits de type non sphérique, la notion de sous-monoïde parabolique définie ici est-elle équivalente à la notion classique ? Si oui, la conjecture est-elle vraie dans ce cadre ? Il est facile de voir à partir de la littérature que la réponse à la première est oui. La réponse à la seconde question est moins évidente. Les propriétés d'injectivité du morphisme $G(N) \rightarrow G(M)$ et de stabilité par intersection ont été prouvées par Van der Lek [124]. Cependant, la propriété $G(N) \cap M = N$ n'apparaît pas dans [124] et semble ne pas avoir été montrée depuis, ou au moins publiée. J'affirme qu'elle découle aussi des travaux de Van der Lek, et que L. Paris et moi en rédigerons une preuve prochainement.

Revenons maintenant aux groupes localement de Garside de type FC et au second point à vérifier pour que leur définition ait un sens. Nous espérons montrer prochainement que :

Théorème 2.3.7. [74] *Soit M_1 et M_2 deux monoïdes localement de Garside et N un sous-monoïde parabolique de M_1 et de M_2 alors*

(a) $M_1 *_N M_2$ est un monoïde localement de Garside et

$$G(M_1 *_N M_2) = G(M_1) *_{G(N)} G(M_2)$$

(b) M_1 , M_2 et N se plongent dans $M_1 *_N M_2$ et en sont des sous-monoïdes paraboliques.

(c) La conjecture 2.3.6 est vraie pour les groupes localement de Garside de type FC.

L'approche générale est de reprendre la méthode développée dans [3]. Cependant, Altobelli utilise les résultats de [124], que nous devons justement étendre pour vérifier la validité de la conjecture 2.3.6. Nous avons donc besoin de méthodes originales. Comme le montre le théorème 2.3.7, un des points clefs est l'utilisation de la notion de produit amalgamé de monoïdes [78] et l'existence de formes normales dans nos produits amalgamés. L'existence de formes normales dans les produits amalgamés de monoïdes est beaucoup moins évidente que dans le cas des groupes. Il n'est même pas toujours vrai que les monoïdes M_1 et M_2 se plongent dans $M_1 *_N M_2$ pour des monoïdes quelconques. Une fois cette approche aboutie, nous obtiendrons une solution aux problèmes du mot et de torsion pour toute une nouvelle famille de groupes d'Artin-Tits plus large que celle des type FC : celle que l'on peut construire par amalgamation à partir des sphériques et des types affine A et C (en utilisant leur structure de Garside, qui vérifie que tout parabolique standard au sens classique est aussi parabolique standard pour la structure de Garside construite par F. Digne [42, 43]). Cela impliquera, par exemple, une solution pour le problème de mot pour le groupe de tresses virtuelles, en utilisant que ce dernier possède un sous-groupe d'indice fini qui est un groupe d'Artin-Tits localement Garside de type FC [73].

Chapitre 3

Algèbre de Hecke des monoïdes de Renner

Je présente dans ce chapitre un aspect a priori relativement différent des travaux de recherche présentés dans le chapitre précédent, à savoir les résultats que j'ai publiés dans [68, 71, 72] sur les monoïdes de Renner et leurs algèbres de Hecke. J'ai été amené à m'intéresser à ce sujet par, d'une part, la découverte des similitudes et des liens profonds qui lient les groupes algébriques et les monoïdes algébriques et, d'autre part, la connaissance de l'importance des groupes d'Artin-Tits pour l'étude des groupes réductifs et de leurs algèbres de Hecke.

3.1 Le monoïde des permutations partielles

Considérons le groupe $\mathbb{G} = GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles sur un corps algébriquement clos \mathbb{K} . Soit \mathbb{B} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, et \mathbb{T} le sous-groupe des matrices diagonales. Le groupe $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ est isomorphe au groupe des matrices monomiales, c'est-à-dire au groupe symétrique S_n , et on a la décomposition de Bruhat $\mathbb{G} = \bigsqcup_{w \in S_n} \mathbb{B}w\mathbb{B}$. D'autre part, il existe une *algèbre de Hecke* dite *générique* $\mathcal{H}(S_n)$ sur $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ telle que si B_n désigne le groupe de tresses à n brins, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} B_n & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][B_n] \\ | & & \downarrow \\ | & & \mathcal{H}(S_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_n & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][S_n] \end{array}$$

Supposons maintenant que $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}}_q$, et notons $\mathbb{G}_q, \mathbb{B}_q$ et \mathbb{T}_q les sous-ensembles de \mathbb{G}, \mathbb{B} et \mathbb{T} dont les coefficients sont dans \mathbb{F}_q . Le groupe $N_{\mathbb{G}_q}(\mathbb{T}_q)/\mathbb{T}_q$ est encore isomorphe à S_n . Posons $\varepsilon = \frac{1}{|\mathbb{B}_q|} \sum_{b \in \mathbb{B}_q} b$ dans $\mathbb{C}[\mathbb{G}_q]$. L'*algèbre de Iwahori-Hecke* $\mathcal{H}(\mathbb{G}_q, \mathbb{B}_q)$ est par définition $\varepsilon \mathbb{C}[\mathbb{G}_q] \varepsilon$. Elle est isomorphe à $\bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{C}w$

en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel. En tant qu'algèbre, $\mathcal{H}(\mathbb{G}_q, \mathbb{B}_q)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_q(S_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, où $\mathcal{H}_q(S_n)$ est la spécialisation en q de $\mathcal{H}(S_n)$.

Maintenant, considérons le monoïde $\mathbb{M} = M_n(\mathbb{K})$ des matrices sur le corps algébriquement clos \mathbb{K} . Dans [122], L. Solomon a considéré le monoïde $R_n = N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}$, où $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ désigne l'adhérence dans \mathbb{M} de $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ pour la topologie de Zariski. Il a appelé ce monoïde le *monoïde des tours* (*Rook monoid*). Il est isomorphe au monoïde des permutations partielles, c'est-à-dire au monoïde des matrices avec *au plus* un coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient étant égal à 1. Pour $n = 8$ ses éléments correspondent donc aux différentes configurations possibles de tours qui ne s'attaquent pas mutuellement sur un échiquier. On a de nouveau une décomposition de Bruhat $\mathbb{M} = \bigsqcup_{w \in R_n} \mathbb{B}w\mathbb{B}$. Supposons de nouveau que $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}}_q$ et notons \mathbb{M}_q les matrices à coefficients dans \mathbb{F}_q . Son algèbre de Iwahori-Hecke est $\mathcal{H}(\mathbb{M}_q, \mathbb{B}_q) = \varepsilon \mathbb{C}[\mathbb{M}_q] \varepsilon$ où $\varepsilon = \frac{1}{|\mathbb{B}_q|} \sum_{b \in \mathbb{B}_q} b$. De nouveau, l'algèbre $\mathcal{H}(\mathbb{M}_q, \mathbb{B}_q)$ est isomorphe à $\bigoplus_{r \in R_n} \mathbb{C}r$ en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel et L. Solomon a montré dans [122] qu'il existe une *algèbre de Hecke générique* $\mathcal{H}(R_n)$ sur $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ telle que $\mathcal{H}(\mathbb{M}_q, \mathbb{B}_q)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_q(R_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, où $\mathcal{H}_q(R_n)$ est la spécialisation en q de $\mathcal{H}(R_n)$. Une question assez naturelle est alors de se demander si il existe un monoïde RB_n qui, dans ce contexte, joue le rôle du groupe de tresses B_n pour S_n , et qui permet en particulier d'obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} RB_n & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][RB_n] \\ | & & \downarrow \\ | & & \mathcal{H}(R_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_n & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][R_n] \end{array}$$

C'est cette question a priori naïve à laquelle je me suis intéressé dans [68], et qui m'a ensuite conduit à étudier les monoïdes algébriques et les monoïdes de Renner, dont je rappellerai la définition dans la section 3.2. Des présentations de R_n étaient connues [92, 107], ainsi que des présentations de l'algèbre $\mathcal{H}(R_n)$ [77, 120]. Enfin dans [47], D. Eastdown et T. Lavers ont introduit un candidat naturel, le *monoïde inversible de tresses* IB_n , dont ils avaient donné une présentation. Les éléments de ce monoïde peuvent être interprétés géométriquement comme les *tresses partielles* à n brins, que l'on obtient en partant d'une tresse à n brins et en oubliant certains brins. Le produit s'obtient par concaténation en ne gardant que les brins qui sont complets. En travaillant sur ces différentes présentations, j'ai obtenu [68] des systèmes de générateurs compatibles : le monoïde des tours R_n possède une présentation de monoïde dont l'ensemble générateur est

$$\{s_1, \dots, s_{n-1}, e_0, \dots, e_{n-1}\}$$

et les relations de définition :

$$\begin{aligned}
s_i^2 &= 1, & 1 \leq i \leq n-1; \\
s_i s_j &= s_j s_i, & 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| \geq 2; \\
s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1; \\
e_i e_j &= e_j e_i = e_{\min(i,j)} & 0 \leq i, j \leq n-1; \\
e_j s_i &= s_i e_j & 1 \leq i < j \leq n-1; \\
e_j s_i &= s_i e_j = e_j & 0 \leq j < i \leq n-1; \\
e_i s_i e_i &= s_i e_{i-1} & 1 \leq i \leq n-1.
\end{aligned}$$

L'algèbre de Hecke $H(R_n)$ est l'algèbre unitaire sur $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ dont les générateurs sont $T_1, \dots, T_{n-1}, E_0, \dots, E_{n-1}$ et les relations de définition

$$\begin{aligned}
T_i^2 &= q \cdot 1 + (q-1)T_i & 1 \leq i \leq n-1; \\
T_i T_j &= T_j T_i & 2 \leq |i-j|; \\
T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2; \\
E_i E_j &= E_j E_i = E_{\min(i,j)} & 0 \leq i, j \leq n-1; \\
E_j T_i &= T_i E_j & 1 \leq i < j \leq n-1; \\
E_j T_i &= T_i E_j = q E_j & 0 \leq j < i \leq n-1; \\
E_i T_i E_i &= T_i E_{i-1} & 1 \leq i \leq n-1.
\end{aligned}$$

On s'aperçoit alors que le monoïde IB_n ne peut convenir, mais que l'on pouvait définir [68] un monoïde RB_n , que j'ai appelé le monoïde des tours tressés (*braid rook monoid*) défini par la présentation de monoïde dont les générateurs sont $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ et les relations de définition :

$$\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1, & 1 \leq i \leq n-1; \\
\sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| \geq 2; \\
\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1; \\
\varepsilon_j \varepsilon_i &= \varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_{\min(i,j)} & 0 \leq i, j \leq n-1; \\
\varepsilon_j \sigma_i &= \sigma_i \varepsilon_j & 1 \leq i \neq j \leq n-1; \\
\varepsilon_i \sigma_i^{\pm 1} \varepsilon_i &= \sigma_i^{\pm 1} \varepsilon_{i-1} & 1 \leq i \leq n-1
\end{aligned}$$

Le diagramme suivant est alors commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
RB_n & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][RB_n] \\
\downarrow & & \downarrow \\
IB_n & & \mathcal{H}(R_n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R_n & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][R_n]
\end{array}$$

De plus, le groupe des unités de RB_n est le groupe de tresses B_n et, comme dans le cas de S_n , les relations à ajouter à la présentation de $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][RB_n]$ pour obtenir $\mathcal{H}(R_n)$ sont des q -déformations des relations à ajouter à la présentation de RB_n pour obtenir R_n . J'ai également donné une interprétation géométrique des éléments de RB_n qui étant la représentation de B_n . Cette représentation permet en particulier de comprendre géométriquement le morphisme $RB_n \rightarrow IB_n$. Certains brins sont marqués à différentes hauteurs, avec des règles de tressages

relatives à ces marquages. Les éléments du monoïde inversible de tresses s'obtiennent en oubliant les brins qui possèdent au moins un marquage.

Rappelons que les groupes de Coxeter sont munis d'une fonction longueur $\ell_{\mathbf{S}}$ (cf. Section 2.1.1). On peut définir le groupe de tresses B_n par la présentation de groupe

$$\langle \underline{w}, w \in S_n \mid \underline{w_1 w_2} = \underline{w_1} \underline{w_2} \text{ si } \ell_{\mathbf{S}}(w_1) + \ell_{\mathbf{S}}(w_2) = \ell_{\mathbf{S}}(w_1 w_2) \rangle.$$

Il est dès lors tentant d'essayer de construire RB_n à partir de R_n par la même méthode. Dans [120] L. Solomon a défini une longueur sur le monoïde des tours. Celle-ci possède un certain nombre de propriétés. En particulier elle étend une formule combinatoire due à Rodrigues [117]. Malheureusement cette fonction longueur ne semble pas permettre de retrouver RB_n . J'ai donc été conduit dans [68] à introduire une nouvelle fonction longueur ℓ sur R_n et à montrer que cette dernière vérifie les mêmes propriétés que celle de L. Solomon. En particulier, elle étend la fonction longueur sur S_n et la formule de Rodrigues. Elle est reliée à la *décomposition normale* dans R_n . Rappelons que tout élément de R_n s'écrit de manière unique $w_1 e w_2$, où w_1, w_2 sont dans S_n , l'élément e est soit 1, soit l'un des générateurs e_i de la présentation de R_n donnée ci-dessus, et w_1, w_2 vérifient une certaine condition relative à e , qui assure l'unicité.

Proposition 3.1.1. *Soit r dans R_n . Notons $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ l'ensemble générateur de S_n .*

(i) *Si (w_1, e, w_2) est la décomposition normale de r , alors*

$$\ell(r) = \dim(\mathbb{B}w_1 e \mathbb{B}) - \dim(\mathbb{B}e w_2 \mathbb{B}).$$

(ii) *Soit s dans S . Alors*

$$\mathbb{B}s\mathbb{B}r\mathbb{B} = \begin{cases} \mathbb{B}r\mathbb{B} & \text{si } \ell(sr) = \ell(r); \\ \mathbb{B}sr\mathbb{B} & \text{si } \ell(sr) = \ell(r) + 1; \\ \mathbb{B}sr\mathbb{B} \cup \mathbb{B}r\mathbb{B} & \text{si } \ell(sr) = \ell(r) - 1. \end{cases}$$

On constate que le monoïde EB_n , dont la présentation de monoïde est

$$\langle \underline{r}, r \in R_n \mid \underline{r_1 r_2} = \underline{r_1} \underline{r_2} \text{ si } \ell_{\mathbf{S}}(r_1) + \ell_{\mathbf{S}}(r_2) = \ell_{\mathbf{S}}(r_1 r_2) \rangle,$$

n'est pas exactement RB_n . En fait, RB_n en est un quotient. Dans EB_n , on ne garde pas la trace des relations $e_i s_i e_i = s_i e_{i-1}$, qui est une relation essentielle quant à la structure de R_n . Nous reviendrons sur ce point dans la section 3.4.

3.2 Présentation des monoïdes de Renner

3.2.1 Monoïde réductif

Comme dans le cas du groupe symétrique, on peut associer à tout groupe de Coxeter $W(\Gamma)$ une algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}(\Gamma)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif [56] :

$$\begin{array}{ccc}
A & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][A(\Gamma)] \\
\downarrow & & \downarrow \\
& & \mathcal{H}(W(\Gamma)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
W(\Gamma) & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][W(\Gamma)]
\end{array}$$

Les relations permettant d'obtenir l'algèbre $\mathcal{H}(W(\Gamma))$ comme un quotient de $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][A(\Gamma)]$ sont des q -déformations des relations de torsion à ajouter à $A(\Gamma)$ pour obtenir la présentation $W(\Gamma)$. En particulier, en remplaçant q par 1 dans ces relations, on obtient $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][W(\Gamma)]$.

Fixons de nouveau un corps \mathbb{K} algébriquement clos, et un groupe réductif G inclus dans $GL_n(\mathbb{K})$. Si B est un sous-groupe de Borel de G , et T est un tore maximal inclus dans B , alors le groupe de Weyl W de G est le groupe $N_G(T)/T$, qui est un groupe de Coxeter fini. On a de nouveau une décomposition de Bruhat $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$. De plus, le fonction longueur $\ell_{\mathbf{s}}$ sur $W(\Gamma)$ permet de comprendre le produit des double-classes : pour w dans $W(\Gamma)$ et s dans \mathbf{S} , l'ensemble des générateurs canoniques de $W(\Gamma)$, on a

$$BswB = \begin{cases} BswB, & \text{si } \ell(sw) = \ell(w) + 1; \\ BswB \sqcup BwB, & \text{si } \ell(sw) = \ell(w) - 1. \end{cases}$$

De la même façon que le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est l'exemple standard d'un groupe réductif, le monoïde $M_n(\mathbb{K})$ est l'exemple standard d'un monoïde réductif. Un *monoïde algébrique* est un sous-monoïde de $M_n(\mathbb{K})$ qui est clos pour la topologie de Zariski. Un monoïde algébrique est *irréductible* si il l'est en tant que variété. Il est facile de construire un monoïde algébrique. En particulier, si G est un groupe algébrique inclus dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors sa clôture de Zariski $M = \overline{G}$ dans $M_n(\mathbb{K})$ est un monoïde algébrique dont G est le groupe des unités. Inversement, si M est un monoïde algébrique, son groupe des unités M^\times est un groupe algébrique. Rappelons qu'un monoïde M possède un *zéro* 0 si $0 \times m = m \times 0 = 0$ pour tout m dans M . Le point de départ de la théorie des monoïdes algébriques est le résultat suivant obtenu indépendamment par M. Putcha et L. Renner en 1982.

Théorème 3.2.1. *Soit M monoïde algébrique irréductible avec un zéro. Alors M est régulier si et seulement si M^\times est réductif.*

Suivant la terminologie standard [114], dans la suite on appelle *monoïde réductif* un monoïde algébrique irréductible dont le groupe des unités est un groupe réductif.

Définition 3.2.2. Soit M un monoïde réductif et T un sous-groupe de Borel de M^\times . Le monoïde de Renner $R(M)$ de M est monoïde $\overline{N_{M^\times}(T)}/T$.

Il est clair que, à isomorphisme près, le monoïde $R(M)$ ne dépend du choix du tore maximal. De plus, le groupe des unités de $R(M)$ est le groupe de Weyl du groupe réductif M^\times . Ici aussi, on a une décomposition de Bruhat $M = \sum_{r \in R(M)} BrB$. Bien entendu, si $M = M_n(\mathbb{K})$ et \mathbb{T} est l'ensemble des matrices

diagonales, alors le monoïde de Renner est le monoïde des tours dont le groupe des unités est S_n .

À la vue de cette théorie, je me suis demandé, comme pour le cas du monoïde des tours, si une théorie similaire existe pour tout monoïde de Renner associé à un monoïde réductif. Autrement dit si on peut apporter une réponse positive à chacune des questions suivantes :

- Question 3.2.3.**
1. Existe-t-il une fonction longueur sur les monoïdes de Renner qui, d'une part, étend la fonction longueur sur le groupe de Coxeter formé par les unités et qui, d'autre part, permet de décrire le produit des doubles classes ?
 2. Existe-t-il pour les monoïdes de Renner une théorie équivalente à celle des groupes de Coxeter pour les groupes de Weyl ?
 3. Existe-t-il une algèbre de Hecke générique associée au monoïde de Renner ?
 4. Existe-t-il un groupe qui joue le rôle que joue le groupe d'Artin-Tits pour un groupe de Coxeter et qui permet en particulier d'avoir un diagramme commutatif similaire à la fois celui du monoïde des tours ?

La fonction longueur introduite par L. Solomon pour le monoïde des tours a été généralisée dans [108, 120, 114] et fournit une réponse positive à la question 3.2.3.1. Pour répondre aux autres questions, une étape préliminaire était de mieux comprendre la structure des monoïdes de Renner. En effet, si un certain nombre de propriétés avaient été établies (la structure de monoïde factorisable, le groupe des unités est un groupe de Weyl...), du point de vue d'une théorie à la Coxeter, peu d'informations étaient disponibles. Ainsi, hors mis le monoïde des tours, aucune présentation de monoïde de Renner n'était connue. Dans la suite de cette section je vais expliquer comment j'ai associé dans [71] à tout monoïde de Renner une présentation similaire à celle du monoïde des tours. Je vais également décrire comment j'y ai apporté une réponse positive alternative à la question 3.2.3.1, reliée aux présentations obtenues. Dans la section 3.3, j'expliquerai comment on peut également répondre de façon positive [72] aux questions 3.2.3.2 et 3.2.3.3. Enfin dans la section 3.4, j'expliquerai ce qu'il reste à comprendre pour répondre à la question 3.2.3.4 et l'intérêt qui j'y vois pour la théorie de Garside, dont j'ai parlé dans le chapitre précédent.

Revenons un instant à la présentation du monoïde des tours donnée dans la section 3.1. Derrière cette présentation se cache un grand nombre d'informations importantes sur la structure de R_n en tant que monoïde de Renner. Hors mis la présentation du groupe S_n , qui correspond aux trois premières lignes des relations, on peut constater que

- Remarque 3.2.4.**
1. les générateurs e_0, \dots, e_{n-1} sont des idempotents, ils commutent entre eux et forment un treillis (linéaire) pour la relation d'ordre définie par $e \leq f$ si $ef = e$;
 2. à chaque e_i on peut associer un ensemble d'éléments de $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ qui commutent avec e_i . Cet ensemble se subdivise en deux, ceux qui vérifient $e_i s_j = e_i$ et les autres ;

3. La relation $s_i e_i s_i = s_i e_{i-1}$ peut être remplacée par $s_i e_i s_i = e_{i-1}$. Partant d'un (mot représentant un) élément $w_1 e_i w_2 e_j w_3$ avec w_1, w_2, w_3 dans S_n et $i < j$ Pour obtenir sa décomposition normale $v_1 e_k v_2$, on peut utiliser les relations de commutation des s_r avec e_i et e_j (et les relations de tresse) pour remplacer w_2 par un mot de longueur minimal. On s'aperçoit alors que l'on obtient $w'_1 e_i e_j w'_2$ ou $w'_1 e_i s_i \cdots s_{j-1} s_j e_j w'_2$. Dans le premier cas, on peut remplacer $e_i e_j$ par e_i et dans le second, on peut écrire

$$\begin{aligned} w'_1 e_i s_i \cdots s_{j-1} s_j e_j w'_2 &= w'_1 e_i e_j s_i \cdots s_{j-1} s_j e_j w'_2 = w'_1 e_i s_i \cdots s_{j-1} e_j s_j e_j w'_2 \\ &= w'_1 e_i s_i \cdots s_{j-1} e_{j-1} w'_2 = \cdots = w'_1 e_{i-1} w'_2. \end{aligned}$$

Il est alors facile d'en déduire la décomposition normale.

3.2.2 Section transverse et fonction de type

Revenons maintenant au cas général et supposons que M est un monoïde réductif dont le groupe des unités est le groupe réductif G . Fixons un Borel B de G et un tore maximal T inclus dans B . On note $R = R(M)$ le monoïde de Renner associé, et W son groupe des unités. On note S l'ensemble des générateurs canoniques de W . Dans la suite on note $E(R)$ l'ensemble des idempotents de R . J'introduis maintenant les définitions et outils nécessaires pour donner une présentation de $R(M)$. Le monoïde R est un monoïde inversible et factorisable. En particulier, $R = W \cdot E(R) = E(R) \cdot W$, l'ensemble $E(R)$ est un sous-monoïde commutatif et un treillis pour l'ordre partiel \leq défini par $e \leq f$ si $ef = fe = e$. De plus, il existe un isomorphisme canonique entre $E(R)$ et l'ensemble $E(\overline{T})$ des idempotents de \overline{T} .

Théorème 3.2.5. [110, Theorem 9.10] *L'ensemble*

$$\Lambda(B) = \{e \in E(\overline{T}) \mid \forall b \in B, be = ebe\}$$

est à la fois une transversale de $E(\overline{T})$ pour l'action de W et un sous-treillis de $E(\overline{T})$.

Dans la suite, l'ensemble $\Lambda(B)$ sera appelé le *treillis transverse* de R relatif à B et T .

Exemple 3.2.6. Considérons $M = M_n(\mathbb{K})$. Soit \mathbb{B} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, et \mathbb{T} le sous-groupe des matrices diagonales. L'ensemble $\Lambda(\mathbb{B})$ est $\{e_0, \dots, e_n\}$ où e_i est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} Id_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang i . les idempotents e_i , pour $i \neq n$, sont ceux qui apparaissent dans la présentation de R_n donnée à la section précédente.

A tout élément e de $\Lambda(B)$, on associe l'ensemble

$$\lambda(e) = \{s \in S \mid se = es\}.$$

On note aussi $\lambda_*(e)$ et $\lambda^*(e)$ les ensembles

$$\lambda_*(e) = \{s \in \lambda(e) \mid se = es = e\}$$

et

$$\lambda^*(e) = \{s \in \lambda(e) \mid se = es \neq e\}.$$

La fonction $e \mapsto \lambda(e)$ s'appelle la *fonction de type* de R . Elle vérifie un certain nombre de propriétés [114]. Bien entendu, $\lambda(e) = \lambda_*(e) \sqcup \lambda^*(e)$, mais on a aussi $\lambda_*(e) = \bigcap_{f \leq e} \lambda(f)$ et $\lambda^*(e) = \bigcap_{f \geq e} \lambda(f)$. De plus, si on pose

$$W(e) = \{w \in W \mid we = ew\}$$

$$W_*(e) = \{w \in W(e) \mid we = e\},$$

et si on note $W^*(e)$ le sous-groupe de W engendré par $\lambda^*(e)$ alors $W(e)$, $W_*(e)$ et $W^*(e)$ sont des sous-groupes paraboliques de W engendrés par les ensembles $\lambda(e)$, $\lambda_*(e)$ et $\lambda^*(e)$, respectivement. De plus, $W(e)$ est le produit direct de $W_*(e)$ et $W^*(e)$.

Pour donner une présentation de R , j'ai encore besoin d'introduire quelques notations ; Si w est dans W et e, f sont dans Λ , alors il est classique [21] que chacun des ensembles $wW(e)$, $W(e)w$, $wW_*(e)$, $W_*(e)w$ et $W(e)wW(f)$ possède un unique élément de longueur minimal dans W . Dans la suite, je note respectivement $D(e)$, $\tilde{D}(e)$, $D_*(e)$ et $\tilde{D}_*(e)$ l'ensemble des éléments w de W qui sont de longueur minimale dans leur classe $wW(e)$, $W(e)w$, $wW_*(e)$ et $W_*(e)w$. Notons que l'ensemble des éléments w de W qui sont de longueur minimale dans leur double classe $W(e)wW(f)$ est $\tilde{D}(e) \cap D(f)$. Le point clef pour obtenir une présentation de R est le suivant :

Proposition 3.2.7. [71, Prop. 1.21] *Avec les notations ci-dessus, si e, f sont dans Λ et w est dans $\tilde{D}(e) \cap D(f)$, alors ewf est dans Λ , et w dans $W_*(ewf)$.*

On peut remarquer que, sous les hypothèses de la proposition, on a $ewf \leq e$ et $ewf \leq f$. Dans la suite je noterai Λ_\circ une copie formelle de $\Lambda \setminus \{1\}$ et par $e \wedge_w f$ je désignerai la lettre de Λ_\circ représentant ewf .

Théorème 3.2.8. [71] *Avec les notations ci-dessus, le monoïde R est présenté par l'ensemble générateur $S \cup \Lambda_\circ$ et les relations de définition*

$$\begin{aligned} (COX1) \quad & s^2 = 1, & s \in S ; \\ (COX2) \quad & \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t} \text{ termes}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{s,t} \text{ termes}} & s, t \in S ; \\ (REN) \quad & se = es, & e \in \Lambda_\circ, s \in \lambda^*(e) ; \\ (REN2) \quad & se = es = e, & e \in \Lambda_\circ, s \in \lambda_*(e) ; \\ (REN3) \quad & \underline{ewf} = e \wedge_w f, & e, f \in \Lambda_\circ, w \in \tilde{D}(e) \cap D(f). \end{aligned}$$

où $(m_{s,t})$ est la matrice de Coxeter de W et \underline{w} est un représentant arbitraire fixé de w .

Quelques remarques s'imposent. Tout d'abord, dans [71] la proposition 3.2.7 et le théorème 3.2.8 sont énoncés pour un monoïde M qui est un monoïde algébrique irréductible, régulier avec un zéro, c'est-à-dire pour des monoïdes réductifs particuliers. Cependant les énoncés et leurs preuves demeurent variables pour tout monoïde réductif [72]. Ensuite, Si on applique ce résultat général au cas du monoïde des tours, on n'obtient pas la présentation donnée auparavant. La raison est que certaines relations du type (REN3) sont redondantes. Ainsi on obtient la relation $e_i s_i \cdots s_{j-1} s_j e_j = e_{i-1}$ dont on a montrée dans la remarque 3.2.4.3 qu'elle découle des relations $s_k e_k s_k = e_{k-1}$. Dans [71], j'ai expliqué comment on peut de façon générale supprimer les relations redondantes. Enfin, le théorème 3.2.8 m'a permis de déduire dans [71] des présentations explicites pour un certain nombre d'exemples de monoïdes de Renner considérés dans la littérature [89, 90, 91] et d'expliquer comment on peut les obtenir pour certaines autres familles de monoïdes de Renner considérées dans [114].

Je décris maintenant la fonction longueur ℓ que j'ai introduite : pour s dans S , on pose $\ell(s) = 1$ et pour e dans Λ_\circ , on pose $\ell(e) = 0$. Maintenant pour x_1, \dots, x_k dans $S \cup \Lambda_\circ$ la longueur du mot $x_1 \dots x_k$ est $\ell(x_1 \dots x_k) = \sum_{i=1}^k \ell(x_i)$. Si r est dans R , on définit sa longueur $\ell(r)$ par

$$\ell(w) = \min \{ \ell(\omega) \mid \omega \text{ représente } w \text{ sur l'alphabet } S \cup \Lambda_\circ \}.$$

En peut voir grâce à la présentation que pour r, r' dans R , on a

$$\ell(rr') \leq \ell(r) + \ell(r').$$

Il est naturel de se demander quel est le lien entre la fonction longueur que je viens de présenter et la fonction longueur initialement introduite pour R_n par L. Solomon. Comme dans le cas de R_n , tout élément w de R_n possède une unique *décomposition normale* (w_1, e, w_2) telle que e est dans Λ , w_1 dans $D_\star(e)$ et w_2 dans $\tilde{D}(e)$ (si w est dans W , alors $e = w_2 = 1$). J'ai remarqué dans [71] que la différence entre les deux longueurs de l'élément w ne dépend que de e , ce qui explique que les deux fournissent une réponse positive à la question 3.2.3.1. Plus précisément, j'ai montré dans [71, 72] que la proposition 3.1.1 se généralise à tout monoïde de Renner associé à un monoïde réductif.

Proposition 3.2.9. *Soit r dans R .*

(i) *Si (w_1, e, w_2) est la décomposition normale de r , alors*

$$\ell(r) = \dim(\mathbb{B}w_1e\mathbb{B}) - \dim(\mathbb{B}ew_2\mathbb{B}).$$

(ii) *Soit s dans S . Alors*

$$\mathbb{B}s\mathbb{B}r\mathbb{B} = \begin{cases} \mathbb{B}r\mathbb{B} & \text{si } \ell(sr) = \ell(r); \\ \mathbb{B}sr\mathbb{B} & \text{si } \ell(sr) = \ell(r) + 1; \\ \mathbb{B}sr\mathbb{B} \cup \mathbb{B}r\mathbb{B} & \text{si } \ell(sr) = \ell(r) - 1. \end{cases}$$

(iii) *Soit e dans Λ . Alors*

$$BeBrB = BerB \text{ et } BrBeB = BreB.$$

3.3 Algèbre de Hecke

3.3.1 Monoïde réductif fini

Supposons de nouveau que $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_q}$. Notons $\sigma : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ l'application $\sigma : (x_{i,j}) \rightarrow (x_{i,j}^q)$ et fixons \underline{M} est monoïde algébrique réductif de $M_n(\mathbb{K})$. Notons \underline{G} son groupe des unités. Il existe un Borel \underline{B} de \underline{G} et un tore maximal \underline{T} contenu dans \underline{B} tels que $\sigma(\underline{B}) = \underline{B}$ et $\sigma(\underline{T}) = \underline{T}$. Notons \underline{R} le monoïde de Renner, \underline{W} le groupe de Weyl et $\underline{\Lambda} = \Lambda(\underline{B})$. Le morphisme σ induit un isomorphisme $\sigma : \underline{R} \rightarrow \underline{R}$. Posons

$$X = \{x \in \underline{X} \mid \sigma(x) = x\}$$

pour $\underline{X} = \underline{M}, \underline{G}, \underline{B}, \underline{T}, \underline{R}, \underline{W}, \underline{\Lambda}$. Alors M est un monoïde fini dont le groupe des unités G est un *groupe réductif fini*. le groupe B est un Borel de G dont T est un tore maximal. De plus, on a $M = \bigsqcup_{r \in R} BrB$ et W est un groupe de Coxeter. Le monoïde R est encore appelé le monoïde de Renner de M . Si $\underline{M} = M_n(\overline{\mathbb{F}_q})$ alors $M = M_n(\mathbb{F}_q)$ et $R = \underline{R}$ est le monoïde des tours. Cependant, en général, R n'est pas égal à \underline{R} , ni leurs groupes de Coxeter associés nécessairement du même type.

On peut définir deux algèbres de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(M, B)$ et $\mathcal{H}(G, B)$: si on note $\varepsilon = \frac{1}{|B|} \sum_{b \in B} b$ dans $\mathbb{C}[G]$, alors $\mathcal{H}(M, B) = \varepsilon \mathbb{C}[M] \varepsilon$ et $\mathcal{H}(G, B) = \varepsilon \mathbb{C}[G] \varepsilon$. L'algèbre $\mathcal{H}(M, B)$ est liée à la théorie de Kazhdan-Lusztig et à la cohomologie d'intersection. Ce point de vue a été initié dans [123] et considéré dans [1].

Les algèbres $\mathcal{H}(M, B)$ et $\mathcal{H}(G, B)$ sont respectivement isomorphes à $\bigoplus_{r \in R} \mathbb{C}r$ et $\bigoplus_{w \in W} \mathbb{C}w$ en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel. On peut [56] associer une algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}(W)$ à tout groupe de Coxeter W , et $\mathcal{H}(G, B)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{H}_q(W) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ où $\mathcal{H}_q(W)$ est la spécialisation en q d'une $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -algèbre $\mathcal{H}(W)$. On a de plus le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][A] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \downarrow & & \mathcal{H}(W) \\ W & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}][W] \end{array}$$

Il est donc naturel [120] de poser la question de l'existence d'une $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}(R)$ associée à tout monoïde de Renner R telle que $\mathcal{H}(M, B)$ soit isomorphe à $\mathcal{H}_q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, où $\mathcal{H}_q(R)$ est la spécialisation en q de $\mathcal{H}(W)$. Comme expliqué dans la section 3.1, si $M = M_n(\mathbb{F}_q)$, L. Solomon a montré dans [120] que la réponse à cette question est positive. Dans [121], L. Solomon a annoncé que dans un papier à venir il étendrait son résultat à tous les monoïdes de Renner construits comme ensemble de points fixes de $\sigma : (x_{i,j}) \mapsto (x_{i,j}^q)$. En fait, il y a prouvé ce résultat sous l'hypothèse que la fonction longueur qu'il a introduit (et qui a ensuite été étendue) soit sous-additive. Mais le papier ne semble jamais avoir été publié.

Cette question peut être posée dans un cadre plus général. Le morphisme σ peut être remplacé par n'importe quel endomorphisme surjectif de monoïde algébrique $\sigma : \underline{M} \rightarrow M$. Le monoïde $M = \{x \in \underline{M} \mid \sigma(x) = x\}$ obtenu est fini et s'appelle un *monoïde réductif fini*. Toutes les définitions et résultats énoncés ci-dessus s'étendent dans ce contexte [115]. La question de l'existence de $\mathcal{H}(R)$ se pose donc aussi dans ce contexte plus général. C'est pour répondre à cette question que j'ai été amené à introduire la notion d'algèbre de Hecke générique dans [72]. Ceci m'a conduit au résultat suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit M un monoïde réductif fini sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. L'algèbre de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(M, B)$ admet la présentation \mathbb{C} -algèbre suivante :*

$$\begin{aligned}
(HEC1) \quad & T_s^2 = (q-1)T_s + qT_1, & s \in S; \\
(HEC2) \quad & \underbrace{T_s T_t T_s \cdots}_{m_{s,t} \text{ termes}} = \underbrace{T_t T_s T_t \cdots}_{m_{s,t} \text{ termes}}, & s, t \in S; \\
(HEC3) \quad & T_s T_e = T_e T_s, & e \in \Lambda_o, s \in \lambda^*(e); \\
(HEC4) \quad & T_s T_e = T_e T_s = qT_e, & e \in \Lambda_o, s \in \lambda_*(e); \\
(HEC5) \quad & T_e T_w T_f = q^{\ell(w)} T_{e \wedge_w f}, & e, f \in \Lambda_o, w \in \tilde{D}(e) \cap D(f).
\end{aligned}$$

Ici, la fonction longueur est celle que j'ai introduite dans [71, 72]. J'ai découvert postérieurement à la rédaction de [72] que la sous-additivité de la fonction longueur de L. Solomon a été prouvée dans [108], concluant ainsi la preuve de L. Solomon dans le cas où σ est $\sigma : (x_{i,j}) \rightarrow (x_{i,j}^q)$. Cependant, ce résultat demeure intéressant pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la preuve est valable pour tous les monoïdes réductifs finis (on peut toutefois raisonnablement penser que la preuve de L. Solomon s'étend). Ensuite elle est complètement indépendante de celle de [108]. De plus, la présentation obtenue est naturellement reliée aux présentations de R que j'ai obtenues : les relations de présentation de $\mathcal{H}(M, B)$ sont des q -déformations de celles de la présentation de $\mathbb{C}[R]$. Il est donc relativement facile de conjecturer ce qui devrait être l'équivalent du groupe d'Artin-Tits (cf. Section 3.4). Enfin, ce qui est sans doute le plus important, ce résultat s'inscrit dans un cadre plus général et découle d'une réponse positive apportée aux questions 3.2.3.2 et 3.2.3.3 posées ci-dessus. C'est de mon point de vue, le principal intérêt des résultats obtenus dans [72]. C'est ce point que je veux expliquer maintenant.

3.3.2 Monoïde de Renner généralisé

C. Mokler, M. Putcha et L. Renner ont considéré deux familles de monoïdes qui sont proches des monoïdes réductifs et des monoïdes réductifs finis (cf. [95, 96, 97, 111, 112, 113] par exemple). Ce sont les monoïdes *finis de type de Lie* et les *monoïdes des faces*. En fait, les monoïdes réductifs finis sont des cas particuliers de monoïdes finis de type de Lie. A chacun de ces monoïdes, on peut associer un monoïde encore appelé monoïde de Renner, dont les propriétés sont proches de celles des monoïdes de Renner des monoïdes réductifs (finis). Des différences existent cependant. Deux questions naturelles se posent alors. D'une part, une théorie permet-elle d'englober tous ces monoïdes de Renner (comme la

théorie des groupes de Coxeter pour les groupes de Weyl)? D'autre part, peut-on associer à tout monoïde de cette théorie une algèbre de Hecke générique, qui dans le cas des monoïdes réductifs finis permet de retrouver l'algèbre de Iwahori-Hecke par spécialisation? Dans [72] j'ai répondu à ces deux questions de façon positive. Si M est un monoïde, on note $E(M)$ son ensemble d'idempotents et $G(R)$ son groupe des unités. Pour e dans $E(M)$ on note $W(e)$ et $W_*(e)$ les sous-groupes de $G(M)$ définis par $W(e) = \{w \in G(M) \mid we = ew\}$ et $W_*(e) = \{w \in W(e) \mid we = e\}$.

Définition 3.3.2. (i) Un *système de Renner-Coxeter généralisé* est défini comm un triple (R, Λ, S) tel que :

- (ECS1) R est un monoïde factorisable;
- (ECS2) Λ à la fois une transversale de $E(R)$ pour l'action de $G(R)$ et un sous-semi-treillis;
- (ECS3) $(G(R), S)$ est un système de Coxeter;
- (ECS4) pour chaque paire $e_1 \leq e_2$ dans $E(R)$ il existe w dans $G(R)$ et $f_1 \leq f_2$ dans Λ telle que $wf_iw^{-1} = e_i$ for $i = 1, 2$;
- (ECS5) pour tout e dans Λ , les sous-groupes $W(e)$ et $W_*(e)$ sont des sous-groupes paraboliques de $G(R)$;
- (ECS6) L'application $e \in \Lambda \mapsto \lambda^*(e) = \{s \in S \mid se = es \neq e\}$ est croissante : $e \leq f \implies \lambda^*(e) \subseteq \lambda^*(f)$.

Dans ce cas, je dis que R est un *monoïde de Renner généralisé*. Suivant la terminologie des monoïdes de Renner, j'appelle Λ le *treillis transverse* de R , et j'appelle *application de type* de R , l'application $\lambda : \Lambda \rightarrow S$ définie par $W(e) = W_{\lambda(e)}$.

L'intérêt de cette définition réside bien entendu dans le fait que les monoïdes de Renner des monoïdes réductifs, les monoïdes de Renner des monoïdes réductifs finis, les monoïdes de Renner des monoïdes finis de type de Lie, et les monoïdes de Renner des monoïdes des faces sont tous des exemples de monoïdes de Renner généralisés. Elle permet donc d'étudier ces monoïdes globalement et propose une réponse positive à la question 3.2.3.2. Les premiers résultats que j'ai établi dans [72] sont la généralisation de ceux obtenus dans [71], via le formalisme de la définition d'un monoïde de Renner généralisé. Introduisons une définition supplémentaire.

Définition 3.3.3. Un 4-uple $(\Gamma, \Lambda_\circ, \lambda_*, \lambda^*)$ est une *donnée de Renner-Coxeter généralisée* si Γ est un graphe de Coxeter d'ensemble de sommets S , Λ_\circ est un semi-treillis inférieur et λ^* , où λ_* sont deux applications de Λ_\circ dans S qui vérifient

- (a) pour chaque e de Λ_\circ , les graphes engendrés par $\lambda_*(e)$ et $\lambda^*(e)$ dans Γ sont disconnectés, et

$$e \leq f \implies \lambda_*(f) \subseteq \lambda_*(e) \text{ et } \lambda^*(e) \subseteq \lambda^*(f).$$

(b) pour tout f, g dans Λ_\circ et chaque $w \in \text{Red}(f, g)$ l'ensemble

$$\{e \in \Lambda_\circ \mid e \leq f, e \leq g \text{ et } w \in W_{\lambda(e)}\}$$

possède un plus grand élément, noté $f \wedge_w g$.

avec $\lambda(e) = \lambda_\star(e) \cup \lambda^\star(e)$ pour $e \in \Lambda_\circ$ et $\text{Red}(e, f)$ est l'ensemble des éléments w de $W(\Gamma)$ qui sont de longueur minimale dans leur double classe $W_{\lambda(e)}wW_{\lambda(f)}$.

L'introduction de cette notion un peu formelle de donnée de Renner-Coxeter généralisée trouve son explication dans le résultat suivant :

Théorème 3.3.4. *Soit M un monoïde. Il existe un système de Renner-Coxeter généralisé (M, Λ, S) si et seulement si il existe une donnée de Renner-Coxeter généralisée $(\Gamma, \Lambda_\circ, \lambda_\star, \lambda^\star)$, avec S pour ensemble de sommets de Γ , tel que M admet la présentation de monoïde suivante :*

$$\begin{aligned} (\text{COX1}) \quad & s^2 = 1, & s & \in S; \\ (\text{COX2}) \quad & \underbrace{s_i s_j s_i \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} = \underbrace{s_j s_i s_j \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} & s, t & \in S; \\ (\text{REN1}) \quad & se = es, & e & \in \Lambda_\circ, s \in \lambda^\star(e); \\ (\text{REN2}) \quad & se = es = e, & e & \in \Lambda_\circ, s \in \lambda_\star(e); \\ (\text{REN3}) \quad & e\underline{w}f = e \wedge_w f, & e, f & \in \Lambda_\circ, w \in \text{Red}(e, f). \end{aligned}$$

où \underline{w} est un représentant réduit arbitraire de $w \in W(\Gamma)$.

Dans ce cas, $W(\Gamma)$ est canoniquement isomorphe au groupe des unités de M , et Λ_\circ s'injecte dans M avec $\Lambda = \Lambda_\circ \sqcup \{1\}$.

Ceci fournit une présentation pour les monoïdes de Renner des monoïdes finis de type de Lie, ainsi que pour ceux des monoïdes des faces. J'ai également montré que la longueur sous-additive que j'ai introduite dans [68] et généralisée dans [71] peut être définie dans le contexte des systèmes de Renner-Coxeter généralisés.

Le second résultat que j'ai obtenu pour ces systèmes est l'existence de la notion d'algèbre de Hecke générique :

Théorème 3.3.5. *A tout monoïde de Renner généralisé R , on peut associer une algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}(R)$ qui est un anneau sur le $\mathbb{Z}[q]$ -module libre de base R . De plus, si M est un monoïde réductif fini $\overline{\mathbb{F}}_q$ dont R est le monoïde de Renner, alors l'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(M, B)$ est isomorphe à la \mathbb{C} -algèbre $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_q(R)$, où $\mathcal{H}_q(R)$ est la spécialisation de $\mathcal{H}(R)$ en q .*

La méthode utilisée dans la preuve de ce résultat n'a rien d'originale, puis qu'elle consiste à adapter la méthode utilisée dans [80, Sec. 7.1] pour les algèbres de Hecke des groupes de Coxeter. La difficulté de cette approche est de deviner d'avance qu'elles sont les relations de présentation de l'algèbre, et donc nécessite une bonne intuition de ce qui se passe. L'étude du monoïde des tours [68] s'est révélée pour cela essentielle.

3.4 Perspectives

Les résultats obtenus dans [72] permettent d'envisager plusieurs axes de prolongements. Le premier est de pouvoir répondre à la question 3.2.3.4. On peut définir le monoïde d'*Artin-Tits* associé à un monoïde de Renner comme étant le monoïde dont la présentation est obtenue en oubliant les relations q -déformées dans l'algèbre de Iwahori-Hecke : le monoïde $A(R)$ est présenté par l'ensemble générateur $S \cup \Lambda_\circ$ et les relations de définition

$$\begin{aligned}
 (\text{COX2}) \quad & \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t} \text{ termes}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{s,t} \text{ termes}} \quad s, t \in S; \\
 (\text{REN}) \quad & se = es, \quad e \in \Lambda_\circ, s \in \lambda(e); \\
 (\text{REN3})' \quad & \underline{e}w f = w(e \wedge_w f), \quad e, f \in \Lambda_\circ, w \in \tilde{D}(e) \cap D(f).
 \end{aligned}$$

où $(m_{s,t})$ est la matrice de Coxeter de $W = G(R)$ et \underline{w} est un représentant arbitraire fixé de w .

Ici on considère que la relation $T_e T_w T_f = q^{\ell(w)} T_{(e \wedge_w f)}$ est équivalente à $T_e T_w T_f = T_w T_{(e \wedge_w f)}$, et donc n'est pas q -déformée. Cependant, on voudrait obtenir cette présentation, ou une autre, par une méthode plus conceptuelle, plutôt que comme une définition ex-nihilo. On peut ainsi se demander si les relations $(\text{REN3})'$ doivent être conservées et/ou si les relations $se = es$ doivent être conservées dans le cas où s est dans $\lambda_\star(e)$. Si on essaie d'utiliser la méthode classique des groupes de Coxeter en défissant $A(R)$ par la présentation

$$\langle \underline{r}, r \in R \mid \underline{r} \underline{r}' = \underline{r r'} \text{ si } \ell(r) + \ell(r') = \ell(r r') \rangle,$$

on perd toute trace des relations (REN3) dont on a vue qu'elles jouent un rôle important dans la structure des monoïdes de Renner généralisés. Je pense que cela soulève des questions qui ne sont pas sans intérêt pour les monoïdes de Renner mais aussi pour la théorie des groupes localement de Garside. En effet, l'une des questions complètement ouverte dans le cadre des structures de Garside est l'existence d'une notion équivalente à celle des groupes de Coxeter pour les groupes d'Artin-Tits. Une meilleure compréhension de ce qui se passe pour les monoïdes de Renner permettrait peut-être de mieux comprendre la situation dans le cas des groupes localement de Garside. Sans entrer dans les détails, cela appelle à une réflexion autour la notion de mot réduit.

La deuxième question qui vient à l'esprit est la classification des données de Renner-Coxeter généralisées. Une telle classification pourrait permettre de revisiter la classification des monoïdes algébriques.

Enfin, dans la définition d'une donnée de Renner-Coxeter généralisée, je ne suppose pas que le groupe de Coxeter soit fini. En particulier, les monoïdes de Renner considérés par C. Mocker dans [95, 96, 97] sont associés à des groupes de Coxeter infinis [84, 85]. Il est naturel de se demander si sa méthode peut être étendue à tous les groupes de Coxeter. De plus, les monoïdes de Renner qu'il construit sont intimement liés au cône de Tits du groupe de Coxeter, dont on a vu au premier chapitre qu'il occupe une place importante dans l'étude des groupes d'Artin-Tits. Il paraît donc légitime de s'interroger sur l'utilisation

possible des propriétés du monoïde de Renner pour l'étude des cônes de Tits et des groupes d'Artin-Tits.

Chapitre 4

Automorphismes de groupe libre et représentation de tresses

Dans ce dernier paragraphe je veux présenter un troisième volet de mes recherches. Étant donné un groupe, il est classique de se demander si il peut être représenté comme un groupe de matrices. Une des façons d'aborder la question est de commencer par le représenter comme un groupe d'automorphismes d'un groupe libre de rang fini. En utilisant le calcul différentiel libre de Fox, on peut ainsi obtenir la représentation de Burau de B_{n+1} comme une représentation de Magnus (voir [17] chapitre 3, par exemple). Il n'est donc pas une surprise que l'étude des représentations des groupes de tresses comme groupe de matrices, ou comme groupe d'automorphismes d'un groupe libre, est le thème de nombreuses publications (voir, par exemple [16],[30],[87], [127]). Dans [65] nous avons introduit une nouvelle représentation des groupes de tresses comme automorphismes de groupe libre en généralisant le point de vue développé dans [86]. Ceci m'a conduit à un certain nombre de questions, que je présente dans la section 4.1.3. L'article [70] s'inscrit dans le cadre de l'étude de l'une d'entre elles.

4.1 Représentation du groupe de tresses

Tout entrelac peut être réalisé comme la tresse fermée $L(b)$ associée à une tresse b . Si b est une tresse à n brins, alors le groupe fondamental $\pi_1(S^3 - L(b))$ a pour présentation

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid \alpha(b)(x_i) = x_i ; i = 1, \dots, n \rangle$$

où α est un certain homomorphisme de B_n dans le groupe des automorphismes du groupe libre F_n à n générateurs x_1, \dots, x_n . Une question naturelle est alors de se demander quelles sont les représentations du groupe de tresses, et plus

généralement d'un groupe d'Artin-Tits, dans le groupe des automorphismes d'un groupe libre de rang fini. Dans [86], C. Kassel et C. Reutenauer jettent un pont entre le monde des tresses (plus précisément, le groupe B_4 des tresses à 4 brins) et le monde des mots et morphismes sturmiens. Ils montrent en particulier que B_4 quotienté par son centre se plonge dans le groupe $Aut(F_2)$, c'est-à-dire dans le groupe des automorphismes du groupe libre F_2 . L'image dans $Aut(F_2)$ des générateurs standards de B_4 sont certains *morphismes sturmiens* (ou leur inverse) bien connus. Dans [65], je me suis posé le problème de l'existence d'une connection plus générale entre les groupes de tresses et les morphismes sturmiens (plus généralement, les *morphismes épisturmiens*, qui sont leur généralisation).

4.1.1 Graphe et transvection

Si Γ est un graphe sans boucle ni arête multiple de sommets x_1, \dots, x_n , on note $J_\Gamma(x_i)$, l'ensemble des sommets de Γ connectés à x_i par une arête.

Définition 4.1.1. Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple de sommets x_1, \dots, x_n . Pour i dans $\{1, \dots, n\}$, on appelle *ième automorphisme de transvection à gauche du groupe libre $F_n = F(x_1, \dots, x_n)$ associé à Γ* , l'automorphisme L_i définit par

$$L_i(x_i) = x_i ; L_i(x_j) = x_i x_j \text{ et } L_i(x_k) = x_k$$

pour j, k dans $\{1, \dots, n\}$ tels que x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$ et x_k n'y est pas.

On définit de façon similaire le *ième automorphisme de transvection à droite R_i de F_n* :

$$R_i(x_i) = x_i ; R_i(x_j) = x_j x_i \text{ et } R_i(x_k) = x_k.$$

Le terme de transvection m'a été inspiré par [105]. Dans la suite on note Λ_Γ l'ensemble des automorphismes L_i et R_i construits à partir du graphe Γ . On note $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ le sous-monoïde de $Aut(F_n)$ engendré par Λ_Γ .

Si on se donne un ensemble fini de sommets S , et que l'on considère les graphes connexes d'ensemble de sommets S , alors on a deux cas extrêmes : le graphe complet et le graphe simplement connexe. Dans le premier cas, les automorphismes que l'on obtient sont les *morphismes épisturmiens* Ψ_i et $\bar{\Psi}_i$ définis dans [45] (voir aussi [57]). Le cas $n = 2$ correspond aux morphismes sturmiens considérés dans [86]. Dans le second cas, le graphe est le diagramme de Coxeter du groupe de tresses B_{n+1} .

Théorème 4.1.2. [65] Soit F_n le groupe libre de base $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec $n \geq 2$. Soit Γ un graphe connexe de sommets x_1, \dots, x_n .

(i) Si Γ est le graphe linéaire le graphe linéaire, on obtient une représentation du groupe de tresses $\varphi_n : B_{n+1} \rightarrow Aut(F_n)$ en posant

$$\varphi(\sigma_i) = L_i, L_i^{-1}, R_i, R_i^{-1}$$

pour $i \equiv 1, 2, 3, 4$ [4], respectivement. De plus, les représentations φ_2 et φ_3 sont fidèles.

(ii) Si Γ est le graphe complet, le monoïde $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ est le monoïde des morphismes épisturmiens qui préservent l'ordre lexicographique sur les mots infinis.

Une fois les fonctions L_i et R_i définies, la preuve de cet énoncé est immédiate, excepté la fidélité de φ_2 et φ_3 . Ce dernier point est montré en utilisant les résultats de [86] et en vérifiant (par calcul) que pour tout n la représentation φ_n est fidèle sur le quasi-centre $\text{QZ}(B_{n+1})$ de B_{n+1} .

Remarque 4.1.3. (a) De (i) on déduit que les groupes de tresses affines \tilde{B}_{4n} peuvent aussi être représentés par des transvections.

(b) Cette énoncé explique le lien trouvé par C. Kassel et C. Reutenauer entre le groupe de tresses et les morphismes sturmiens : le graphe linéaire à 2 sommets est un graphe complet.

(c) La question de la fidélité de la représentation φ_n pour $n \geq 5$ semble difficile. En particulier la méthode employée par V. Shpilrain dans [125] pour prouver la fidélité des représentations de M. Wada [127] est ici totalement inefficace.

4.1.2 Autour d'une conjecture de Tits

Une conjecture de Tits restée longtemps ouverte affirmait que si on considère le groupe de tresses B_{n+1} de présentation

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right\rangle$$

alors le sous-groupe engendré par les σ_i^2 est un *groupe d'Artin-Tits à angles droits* (ie $m_{i,j} = 2$ ou ∞) dont une présentation est

$$\langle \sigma_i^2 \mid \sigma_i^2 \sigma_j^2 = \sigma_j^2 \sigma_i^2 \text{ si } |i - j| > 1 \rangle.$$

Autrement dit, ne subsiste que les relations de commutation évidentes. Cette conjecture s'étend à tous les groupes d'Artin-Tits et a été prouvée de façon générale par J. Crisp et L. Paris :

Théorème 4.1.4. [37] Soit Γ un graphe de Coxeter à n sommets, et $(m_{i,j})$ sa matrice associée. Notons $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les générateurs de $A(\Gamma)$. Considérons des entiers relatifs k_1, \dots, k_n tels que $|k_i| \geq 2$ pour tout i , et posons $\tau_i = \sigma_i^{k_i}$. Le sous-groupe de $A(\Gamma)$ engendré par les τ_i a pour présentation

$$\langle \tau_i \mid \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ si } m_{i,j} = 2 \rangle.$$

De nouveau, ne subsiste que les relations évidentes. On peut remarquer que le résultat classique de Van der Lek s'inscrit aussi dans ce cadre général : si on prend une partie des générateurs et que l'on regarde le sous-groupe parabolique standard engendré (on considère donc $k_i = 0$ ou 1), ne subsiste que les relations évidentes : on a le groupe d'Artin-Tits donné par le sous-graphe. Une question naturelle est : considérons un graphe de Coxeter de matrice $(m_{i,j})$. Que ce passe-t-il si on supprime les hypothèses $|k_i| \geq 2$ et $k_i = 0, 1$ dans l'énoncé

du théorème 4.1.4? La réponse est loin d'être évidente. En effet, On déduit facilement de [93, Theorem 3] que le résultat n'est pas nécessairement un groupe d'Artin-Tits.

Un autre cas particulier est $|k_i| \leq 1$. Bien entendu, cette question n'a pas d'intérêt en terme de sous-groupes (cela revient à prendre $k_i = 0, 1$). Mais que peut-on dire du monoïde engendré par les $\sigma_i^{k_i}$ pour $|k_i| \leq 1$? Est-il vrai que ne subsiste encore que ce qui est évident?

Conjecture 4.1.5. [65] Soit Γ un graphe de Coxeter de matrice $(m_{i,j})$ et d'ensemble de sommets $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Soit $S_1 \cup S_2$ une partition de S . Posons $\tau_i = \sigma_i$ si $s_i \in S_1$ et $\tau_i = \sigma_i^{-1}$ sinon. Le sous-monoïde de A engendré par $S_1 \cup S_2^{-1}$ possède la présentation suivante :

$$\left\langle S_1 \cup S_2^{-1} \left| \begin{array}{l} \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \sigma_i \in S_1, \sigma_j \in S_2, m_{i,j} = 2 \\ \underbrace{\tau_i \tau_j \tau_i \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} = \underbrace{\tau_j \tau_i \tau_j \cdots}_{m_{i,j} \text{ termes}} \quad (s_i, s_j) \in S_r \times S_r, r = 1, 2; m_{i,j} \neq \infty \end{array} \right. \right\rangle$$

Bien que l'on ignore si la représentation φ_n est fidèle pour tout n , celle-ci se révèle toutefois comme un outil efficace pour prouver la conjecture ci-dessus dans un cas particulier [65].

Proposition 4.1.6. Soit B_{n+1} le groupe de tresses à $n+1$ brins, et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ses générateurs standards. Posons $\tau_i = \sigma_i$ si i est pair, et $\tau_i = \sigma_i^{-1}$ si i est impair. Alors le sous-monoïde de B_n engendré par les τ_i a pour présentation

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_n \mid \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, |i - j| > 1 \rangle.$$

Ce résultat découle de l'étude de certains sous-monoïdes de $\mathcal{F}^+(\Gamma)$, et en particulier de la détermination de leurs présentations. Le point clef est que l'image par φ_n du sous-monoïde de B_{n+1} engendré par les τ_i est justement un sous-monoïde de $\mathcal{F}^+(\Gamma)$, dont la présentation est celle de la proposition. Un résultat analogue peut être énoncé pour les groupe de tresses affines \tilde{B}_{4n} .

4.1.3 Une liste de questions

Les travaux publiés dans [65] m'ont fait me poser un certain nombre de questions, en grande majorité non incluses dans [65], que je détaille ici.

Question 1 : la représentation φ_n est-elle fidèle pour tout entier n ?

Question 2 : parmi les automorphismes dans l'image de φ_n , peut-on caractériser ceux qui sont l'image d'un simple? Peut-on caractériser ceux qui sont l'image d'un élément du monoïde de tresses positives? Si oui, peut-on retrouver la structure de treillis?

Question 3 : peut-on retrouver l'ordre des tresses?

Question 4 : en utilisant le morphisme naturel ι de $Aut(F_n)$ dans $GL_n(\mathbb{Z})$, on obtient une représentation $\tilde{\varphi}_n = \iota \circ \varphi_n$ de B_{n+1} dans $GL_n(\mathbb{Z})$. Quel est le noyau de cette représentation? A partir des résultats de [65], on peut s'apercevoir que ce noyau contient une puissance de Δ_n^2 . Est-il vrai que $Ker \tilde{\varphi}_n$ est un sous-groupe du centre $Z(B_{n+1})$ de B_{n+1} ? On sait que pour $n = 2$, la réponse à cette dernière question est positive [86, Lemme 1.11]. Si la réponse est aussi vraie en général, alors la réponse à la question 1 est positive car φ_n est injective sur $QZ(B_{n+1})$.

En utilisant le calcul différentiel libre de Fox, on peut obtenir la représentation de Burau de B_{n+1} comme une représentation de Magnus via la représentation fidèle classique de B_{n+1} comme sous-groupe de F_{n+1} (voir [17] chapitre 3, par exemple). On voit facilement que via φ_n , la seule représentation de Magnus de B_{n+1} possible est $\tilde{\varphi}_n$.

Question 5 : la représentation de \tilde{B}_{4n} de la proposition 2.6 est-elle fidèle? En général, quels sont les groupes d'Artin-Tits qui possèdent une représentation par transvections fidèle? Dans [65], on a donné un certain nombre de conditions nécessaires pour qu'une représentation existe.

Question 6 : quels sont les graphes Γ sans boucle ni arrête multiple tels que $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ est finitement présenté avec Λ_Γ pour ensemble générateur? Quelle est alors leurs présentations?

On sait que ce n'est pas toujours le cas : lorsque $n = 2$ (et Γ connexe) alors $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ a pour présentation

$$\langle L_1, L_2, R_1, R_2 \mid L_1 L_2^k R_1 = R_1 R_2^k L_1 ; L_2 L_1^k R_2 = R_2 R_1^k L_2 \quad k \in \mathbb{N}^+ \rangle$$

d'après la proposition 2.1 de [86]. Plus généralement, dans le cas de morphismes épisturmiens (c'est-à-dire du graphe complet), $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ n'est pas finitement engendré (cela découle immédiatement de [116, Prop. 6.5]). Pour $n \geq 3$ et Γ connexe bipartite, je pense que l'on a une présentation finie. Le cas des graphes bi-partites est bien entendu très éloigné du cas du graphe complet des morphismes épisturmiens, sauf dans le cas $n = 2$.

Question 7 : quels sont les graphes Γ sans boucle ni arrête multiple tels que le sous-groupe de $Aut(F_n)$ engendré par Λ_Γ est finitement présenté (avec Λ_Γ pour ensemble générateur)? Quelle est alors la présentation de ces groupes? Si le graphe est linéaire, on a vu que des relations de tresses existent.

Question 8 : si Γ est le graphe complet à n sommets x_1, \dots, x_n , d'après [45], l'ensemble des *morphismes épisturmiens* est isomorphe à $S_n \ltimes \mathcal{F}^+(\Gamma)$, où S_n est le groupe symétrique vu comme le sous-groupe de $Aut(F_n)$ engendré par les automorphismes $E_{i,j}$ définis par $E_{i,j}(x_i) = x_j$, $E_{i,j}(x_j) = x_i$ et $E_{i,j}(x_k) = x_k$ pour $k \neq i, j$. On peut remarquer que S_n est aussi le groupe des automorphismes du graphe complet Γ . Plus généralement, si Γ est un graphe sans boucle ni

arrête multiple à n sommets, on a un morphisme canonique de $Aut(\Gamma) \times \mathcal{F}^+(\Gamma)$ dans $Aut(F_n)$. Est-t-il injectif? Évidemment, chacune des restrictions aux deux sous-groupes est injective. Une condition nécessaire pour que la réponse soit positive est que l'intersection de $Aut(\Gamma)$ et $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ dans $Aut(F_n)$ est triviale. Mais, cette condition n'est a priori pas suffisante puisque $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ est un monoïde et pas un groupe.

Question 9 : dans [9], les auteurs montrent que l'on peut décider si un morphisme est sturmien grâce à des mots de test. Étant donné un graphe (sans boucle ni arête multiple) quelconque, existe-t-il des mots de test pour $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ ou pour $Aut(\Gamma) \times \mathcal{F}^+(\Gamma)$?

4.2 Autour de la notion de paire sturmiennne

Je décris maintenant les travaux publiés dans [70] et leurs liens avec ceux de l'article [65].

4.2.1 L'espace stable d'un endomorphisme

L'article [70] peut apparaître à première vue comme une amusette sans grand rapport avec l'article [65]. Considérons un ensemble E et une application $\varphi : E \rightarrow E$. On peut définir 4 ensembles

$$\text{Fix}(\varphi) = \{x \in E \mid \varphi(x) = x\},$$

$$\text{Orb}(\varphi) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \text{Fix}(\varphi^n),$$

$$\text{Attrac}(\varphi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(X).$$

$$\text{Stab}(\varphi) = \{x \in X \mid \exists (x_n)_{n \geq 0}, \varphi(x_{n+1}) = x_n \text{ et } x_0 = x\},$$

Les trois premiers sont classiquement appelés le *fixateur*, l'*espace des orbites*, et l'*attracteur* de φ . J'ai appelé le dernier l'*espace stable* de φ . On a clairement la suite d'inclusions

$$\text{Fix}(\varphi) \subseteq \text{Orb}(\varphi) \subseteq \text{Stab}(\varphi) \subseteq \text{Attrac}(\varphi)$$

qui en général sont strictes. Chacun des 4 ensembles est l'objet de nombreux articles dans différents domaines des mathématiques (voir [6, 15, 29, 46, 50, 57, 81, 82, 106, 119, 125, 126] par exemple). La question que je me suis posée est :

$$\text{Dans quels cas a-t-on } \text{Stab}(\varphi) = \text{Attrac}(\varphi) ?$$

Bien entendu, si φ est injective ou surjective, il est clair que l'égalité a lieu. Il est cependant facile de construire des exemples où l'inclusion est stricte. J'expliquerai dans la section 4.2.2 les raisons qui m'ont conduit à me poser cette question. Le point qui m'a surpris le plus c'est que je n'ai réussi à trouver aucune référence sur cette question pourtant naturelle et compréhensible par un

étudiant en licence. C'est ce qui m'a conduit à rechercher dans la littérature différents exemples d'applications d'un espace dans lui-même et à essayer de répondre à cette question pour chacun d'eux. Les résultats de [70] peuvent être regroupés en deux théorèmes :

Théorème 4.2.1. *Supposons que l'on soit dans l'un des cas suivants :*

1. *L'ensemble E est un espace de Hilbert avec une base infinie dénombrable, et $\varphi : E \rightarrow E$ une application linéaire continue d'image dense ;*
2. *L'ensemble E est le disque unité ouvert \mathbb{D} du plan complexe, et $\varphi : E \rightarrow E$ est une fonction analytique.*

Alors l'inclusion $\text{Stab}(\varphi) \subseteq \text{Attrac}(\varphi)$ peut être stricte.

Théorème 4.2.2. *Supposons que l'on soit dans l'un des cas suivants :*

1. *L'ensemble E est espace métrique compacte, et $\varphi : E \rightarrow E$ est continue ;*
2. *L'ensemble E est un groupe limite de groupes libres, et $\varphi : E \rightarrow E$ est un endomorphisme ;*
3. *L'ensemble E est l'ensemble des mots finis sur un alphabet fini et $\varphi : E \rightarrow E$ est une substitution (effaçante ou non) ;*
4. *L'ensemble E est l'ensemble des mots infinis à droite sur un alphabet fini et $\varphi : E \rightarrow E$ est une substitution (effaçante ou non) ;*

Alors $\text{Stab}(\varphi) = \text{Attrac}(\varphi)$.

La preuve du premier théorème consiste à construire astucieusement des contre-exemples. La preuve du second théorème est au cas par cas avec des arguments spécifiques. Le premier cas se traite par un argument *diagonal* évident. On peut noter qu'un groupe libre de rang fini est un cas particulier de groupe limite. Le cas des groupes libres se prouve en utilisant qu'ils sont hopfiens. Le cas des groupes limites se traite par un argument similaire. Pour les deux derniers cas, l'argument clef utilise la finitude de l'alphabet.

4.2.2 Mots et morphismes épisturmiens

L'objet de l'article [65] était d'établir un lien entre les groupes de tresses et les morphismes épisturmiens, généralisant ainsi les résultats de [86]. J'ai déjà largement traité du cas des tresses. Les morphismes (épi)sturmiens possèdent aussi de nombreuses propriétés. Parmi elles, la plus remarquable, selon moi est la façon dont ils sont liés aux mots épisturmiens.

Si A est une ensemble fini, appelé *alphabet*, et A^∞ est l'ensemble des mots infinis à droite sur A , alors la *complexité* d'un mot w de A^∞ est l'application $p(w, \cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $p(w, n)$ est le nombre de facteurs de w de longueur n , c'est-à-dire le nombre de mots w_1 de longueur n tels que $w = w'_1 w_1 w''_1$ où w'_1 est un mot fini et w''_1 est dans A^∞ . Un mot w de $\{0, 1\}^*$ est dit *sturmien* si pour tout n , on a $P(w, n) = n + 1$. Autrement dit, les mots sturmiens sont les mots *non ultimement périodiques* de complexité minimale. Une *substitution* est une application de $\varphi : A^\infty \rightarrow A^\infty$ induite par un morphisme de monoïde $\varphi : A^* \rightarrow A^*$,

où A^* est le monoïde des mots finis muni de l'opération de concaténation. Une substitution est dite *non effaçante* si l'endomorphisme associé n'envoie aucune lettre de A sur le mot trivial (l'endomorphisme n'est pas nécessairement unique mais le caractère non effaçant ne dépend de l'endomorphisme choisi). Notons St l'ensemble des mots sturmiens. On dit qu'une substitution non effaçante σ est un *morphisme sturmien* si $\sigma(\text{St}) \subseteq \text{St}$. La notion de mot *épisturmien* est une généralisation à l'alphabet $\{1, \dots, n\}$ de la notion de mot sturmien, basée sur la caractérisation de ces derniers en terme de *mot de retour*. Si on note St_n l'ensemble des mots épisturmiens sur un alphabet à n lettres, alors les *morphismes épisturmiens* sont encore définis comme les substitutions non effaçantes σ telles que $\sigma(\text{St}_n) \subseteq \text{St}_n$. Si Γ est le graphe complet, il est clair que tout élément de $\Lambda(\Gamma)$ induit une substitution non effaçante et j'ai déjà mentionné que, d'après [45], l'ensemble des morphismes épisturmiens est isomorphe à $S_n \times \mathcal{F}^+(\Gamma)$ où $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ est le monoïde engendré par Λ_Γ . On a le fait remarquable suivant :

Théorème 4.2.3. *Soit $A = \{1, \dots, n\}$.*

- (i) $S_n \times \mathcal{F}^+(\Gamma) = \{\sigma \text{ substitution non effaçante} \mid \sigma(\text{St}_n) \subseteq \text{St}_n\}$.
- (ii) $\text{St}_n = \{w \in A^\infty \mid \exists(w_n), w_n \in A^\infty \text{ et } (f_n), f_n \in \mathcal{F}^+(\Gamma), w_0 = w \text{ et } w_n = f_n(w_{n+1})\}$.

Ce résultat montre que si les morphismes (épi)sturmiens sont définis à partir des mots (épi)sturmiens, on peut aussi définir les mots (épi)sturmiens à partir des morphismes (épi)sturmiens. Ceci donne envie de poser la question suivante :

soit E un ensemble et M un sous-monoïde de E^E ; définissons l'espace stable $\text{Stab}(M)$ de M comme l'ensemble

$$\{w \in E \mid \exists(w_n), w_n \in E \text{ et } (f_n), f_n \in M, w_0 = w \text{ et } w_n = f_n(w_{n+1})\}.$$

Question 8 : Que peut-on dire de $\text{Stab}(M)$?

Le cas particulier que j'ai en tête est, bien entendu, le cas où E l'ensemble des mots infinis à droite sur x_1, \dots, x_n et $M = \mathcal{F}^+(\Gamma)$ avec Γ un graphe de sommet x_1, \dots, x_n . Si Γ est le graphe complet, $\text{Stab}(\mathcal{F}^+(\Gamma)) = \text{St}_n$ possède de nombreuses propriétés. Qu'en est-il pour les autres graphes, et en particulier pour le graphe linéaire ? On peut noter que l'ensemble des *mots lisses* étudiés dans [10, 18] est aussi l'espace stable d'un monoïde [70]. Les mots lisses sont reliés à la fonction de *run-length encoding*, et le mot lisse le plus fameux est sans nul doute le mot de *Kolakoski*. Enfin, si M est monogène engendré par une application f , alors $\text{Stab}(M)$ est égal à l'ensemble $\text{Stab}(f)$ considéré dans [70] et le chapitre précédent. La question que je m'y suis posée avait pour objectif de pouvoir mieux comprendre les ensembles $\text{Stab}(\mathcal{F}^+(\Gamma))$.

Terminons par une définition et une question : considérons un ensemble de mots infinis X sur un alphabet fini A , et appelons *stabilisant* de X le monoïde des substitutions non effaçantes σ telles que $\sigma(X) \subseteq X$. Je dit qu'un graphe simple et sans boucle Γ est *sturmien* si le stabilisant de $\text{Stab}(\mathcal{F}^+(\Gamma))$ est $\text{Aut}(\Gamma) \times \mathcal{F}^+(\Gamma)$. Dans ce cas, je dis que la paire $(\mathcal{F}^+(\Gamma), \text{Stab}(\mathcal{F}^+(\Gamma)))$ est une

*paire sturmienn*e. Le théorème 4.2.3 affirme que le graphe complet est sturmien.

Question 10 : quels sont les graphes sturmiens ?

Index

- algèbre
 - de Hecke générique, 35, 44
 - de Iwahori-Hecke, 35, 36, 44
- alphabet, 56
- atome, 25
- attracteur, 55
- automorphisme de transvection, 51
- catégorie
 - de Garside, 27
 - de rubans, 14, 28
- centralisateur, 13
- chemin cubique normal, 12
- commensurateur, 13
- complexe
 - de Charney-Davis-Deligne, 10
 - de Charney-Davis/Salvetti, 11
- complexité, 56
- cône de Tits, 9
- conjecture du $K(\pi, 1)$, 8
- décomposition de Bruhat, 35
- décomposition normale, 38, 43
- donnée de Renner-Coxeter généralisée, 46
- élément
 - de Garside, 19, 23
 - équilibré, 19
 - simple, 24
- ensemble solution théorique, 31
- équation de Yang-Baxter quantique, 31
- équilibré, 23
- espace des orbites, 55
- espace stable, 55, 57
- facteur, 23, 56
- fixateur, 55
- forme normale, 19
- graphe
 - sturmien, 57
- graphe de Coxeter, 7
 - de dimension 2, 16
 - de type $K(\pi, 1)$, 9
 - de type FC, 9
 - de type sphérique, 8
- groupe
 - d'Artin-Tits, 8
 - à angles droits, 52
 - de type sphérique, 8
 - indécomposable, 14
 - de Coxeter, 8
 - de Garside, 24
 - de structure, 31
 - de tresses, 8
 - de Weyl, 39
 - localement de Garside, 24
 - de type FC, 32
 - quasi-Garside, 26
 - réductif fini, 44
- groupeïde
 - de Garside, 28
- homomorphisme
 - LCM-, 20
 - lcm-, 20
- longueur ℓ , 43
- matrice de Coxeter, 7
- monoïde
 - algébrique, 39
 - irréductible, 39
- d'Artin-Tits, 14, 48
- de Garside, 23

- de Renner, 39, 45
- de Renner généralisé, 46
- des faces, 45
- des tours, 36
- fini de type de Lie, 45
- inversible de tresses, 36
- localement de Garside, 23
- noetherien, 19
- réductif fini, 45
- réductif, 39
- simplifiable, 19
- morphisme
 - épisturmien, 51, 54, 57
 - sturmien, 57
- mot
 - épisturmien, 57
 - lisse, 57
 - sturmien, 56
- normalisateur, 13
- paire sturmiennne, 58
- propriété FRZ, 14
- quasi-centralisateur, 13
- réflexions, 9
- ruban, 14
 - positif, 15
 - positif élémentaire, 15, 29
- simple, 19
- solution pliable, 32
- sous-groupe
 - de Garside, 27
 - parabolique, 10, 33
 - parabolique standard, 10
- sous-monoïde
 - de Garside, 27
 - parabolique, 15
 - parabolique standard, 25
- stabilisant, 57
- substitution
 - non effaçante, 57
 - sur A , 56
- support, 25
- système de Renner-Coxeter généralisé, 46
- treillis transverse, 41
- zéro, 39

Bibliographie

- [1] AKER K., CAN M. ET TASKIN M., R-polynomials of finite monoids of Lie. *IJAC* **20** (2010) 793–805.
- [2] ALTOBELLI J.A. ET CHARNEY R., A geometric rational form for Artin groups of FC type. *Geom. Dedicata* **79** (2000), 277–289.
- [3] ALTOBELLI J. A., The word problem for Artin groups of FC type. *J. Pure Appl. Algebra* **129** (1998), 1–22.
- [4] ANTONY N., On parabolic submonoids of a class of singular Artin monoids. *J. Aust. Math. Soc.* **82** (2007), 29–37.
- [5] ANTONY N., On singular Artin monoids and contributions to Birman’s conjecture. *Comm. Algebra* **33** (2005), 4043–4056.
- [6] ARNOUX P., BERTHÉ V., HILION A., SIEGEL A., Fractal representation of the attractive lamination of an auto of the free group. *Ann. Inst. Fourier* **56** (2006), 2161–2212.
- [7] BELLINGERI P., Centralisers in surface braid groups. *Comm. Algebra* **32** (2004), 4099–4116.
- [8] BELLINGERI P. ET GERVAIS S., Surface framed braids. *arXiv :1001.4471*
- [9] BERSTEL J. ET SÉÉBOLD P., A remark on morphic Sturmian words. *RAIRO Inform. Théor. Appl.* **28** (1994), 255–263.
- [10] BERTHÉ V., BRLEK S. ET CHOQUETTE P., Smooth words over arbitrary alphabets. *Theoret. Comput. Sci.* **341** (2005), 293–310.
- [11] BESSIS D., The dual braid monoid. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **36** (2003), 643–683.
- [12] BESSIS D., A dual braid monoid for the free group. *J. Algebra* **302** (2006), 55–69.
- [13] BESSIS D., Garside categories, periodic loops and cyclic sets. *preprint*
- [14] BESSIS D., DIGNE F. ET MICHEL J., Springer theory in braids groups and the Birman-Ko-Lee monoid. *Pacific J. Math.* **205** (2002), 287–309.
- [15] BESTVINA M. ET HANDEL H., Train tracks for surface homeomorphisms. *Topology.* **34** (1995), 109–140.
- [16] BIGELOW S., The Burau representation is not faithful for $n = 5$. *Geom. Topol.* **3** (1999), 397–404.

- [17] BIRMAN J., New points of view in knot theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* **28** (1993), 253–287.
- [18] BRELK S., JAMET D. ET PAQUIN G., Smooth words on 2-letter alphabets having same parity. *Theoret. Comput. Sci.* **393** (2008), 166–181.
- [19] BRIDSON M. ET HAEFLIGER A., Metric spaces of non-positive curvature. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [20] BRIN M., On the Zappa-Szép product. *Comm. Algebra* **33** (2005), 393–424
- [21] BOURBAKI, N., *Groupes et Algèbres de Lie chapitres IV, V, VI*. Hermann, Paris, 1968.
- [22] CEDÓ F., JESPERS E. ET DEL RIO A., Involutive Yang-Baxter groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), 2541–2558.
- [23] Champetier C. et Guirardel V., Limit groups as limits of free groups. *Israel J. Math.* **146** (2005), 1–75.
- [24] CHARNEY R. ET DAVIS M. W., The $K(\pi, 1)$ -problem for hyperplane complements associated to infinite reflection groups. *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), 597–627.
- [25] CHARNEY R. ET DAVIS M. W., Finite $K(\pi, 1)$ s for Artin groups. *Prospects in topology* (Princeton, NJ, 1994), 110–124, Ann. of Math. Stud., 138, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.
- [26] CHARNEY R. ET MEIER J., The language of geodesics for Garside groups. *Math. Z.* **248** (2004), 495–509.
- [27] CHARNEY R. ET PEIFER D., The $K(\pi, 1)$ -conjecture for the affine braid groups. *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), 584–600.
- [28] CHARNEY R., The Tits conjecture for locally reducible Artin groups. *Int. J. Algebra Comput.* **10** (2000), 783–797.
- [29] CHOTHI V., EVEREST G. ET WARD T., S -integer dynamical systems : periodic points. *J. Reine Angew. Math.* **489** (1997), 99–132.
- [30] CRISP, J. ET PARIS, L., Representations of the braid group by automorphisms of groups, invariants of links, and Garside groups. *Pacific J. Math.* **221** (2005), 1–28.
- [31] CHOURAQUI F. ET GODELLE E., Folding of set-theoretical solutions of the Yang-Baxter equation. *à paraître dans Algebra and Representation Theory*
- [32] CHOURAQUI F., Garside groups and the Yang-Baxter equation. *à paraître dans Comm. in Algebra.*
- [33] CORRAN R., Conjugacy in singular Artin monoids. *J. Aust. Math. Soc.* **79** (2005), 183–212.
- [34] CRISP J., Injective maps between Artin groups. *Proceedings of the special year in Geometric group theory*, Berlin, (1999) 119–138.
- [35] CRISP J., Symmetrical subgroups of Artin groups. *Adv. in Math* **152** (2000), 159–177.

- [36] CRISP J., GODELLE E. ET WIEST B., The conjugacy problem in right-angled Artin groups and their subgroups. *J. of Topology* **2** (2009), 442-460.
- [37] CRISP J. ET PARIS L., The solution to a conjecture of Tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an Artin group. *Invent. Math.* **145** (2001), 19-36
- [38] DEHORNOY P. ET PARIS L., Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups. *Proc. London Math Soc.* **79** (1999), 569–604.
- [39] DEHORNOY P., Groupe de Garside. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* **35** (2002), 267–306.
- [40] DELIGNE P., Les immeubles des groupes de tresses généralisés. *Invent. Math.* **17** (1972), 273–302.
- [41] DIGNE F. ET MICHEL J., Garside and Locally Garside categories. *preprint december 2006*.
- [42] DIGNE F., Présentations duales des groupes de tresses de type affine \tilde{A} . *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), no. 1, 23–47.
- [43] DIGNE F., A Garside presentation for Artin-Tits groups of type \tilde{C}_n . arXiv :1002.4320.
- [44] DRINFELD V.G., On some unsolved problems in quantum group theory. *Lec. Notes Math.* **1510** (1992), 1-8.
- [45] DROUBAY X., JUSTIN J. ET PIRILLO G., Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy. *Theoret. Comput. Sci.* **255** (2001), 539–553.
- [46] Dyer J.L. et Scott G.P., Periodic automorphisms of free groups. *Comm. Alg.* **4** (1975), 195–201.
- [47] EASTDOWN D. ET LAVERS T., The inverse braid monoid. *Adv. in math.* **186** (2004), 438–455.
- [48] ELLIS G. ET SKOLDBERG E., The $K(\pi, 1)$ conjecture for a class of Artin groups. *Comment. Math. Helv.* **85** (2010), 409–415.
- [49] ETINGOF P., SCHEDLER T. ET SOLOVIEV A., Set-theoretical solutions to the Quantum Yang-Baxter equation. *Duke Math. J.* **100** (1999), 169-209.
- [50] Farrell F.T. et Jones L.E., New attractors in hyperbolic dynamics. *J. Differential Geom.* **15** (1980), 107–133.
- [51] FENN R., ROLFSEN D. ET ZHU J., Centralisers in the braid group and singular braid monoid. *Enseign. Math.* **42** (1996), 75-96.
- [52] GARSIDE F.A., The braid group and other groups. *Quart. J. Math. Oxford* **20** (1969), 235-254.
- [53] GATEVA-IVANOVA T. ET MAJID S., Matched pairs approach to set theoretic solutions of the Yang-Baxter equation. *J. Algebra* **319** (2008), 1462-1529.
- [54] GATEVA-IVANOVA T. ET VAN DEN BERGH M., Semigroups of I -type. *J. Algebra* **206** (1998), 97-112.

- [55] GATEVA-IVANOVA T., Garside Structures on Monoids with Quadratic Square-Free Relations. *à paraître dans Algebr. Represent.Theor.*
- [56] GECK M. ET PFEIFFER G., Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke Algebras. *Oxford Science Publications*. London Math. Soc. monographs new series 21, Oxford, 2000.
- [57] Glen A., Levé F. et Richomme G., Quasiperiodic and Lyndon episturmian words. *Theoret. Comput. Sci.* **409** (2008), 578–600.
- [58] GODELLE E., Morphismes injectifs entre groupes d'Artin-Tits. *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 519–536.
- [59] GODELLE E., Normalisateur et groupe d'Artin-Tits de type sphérique. *J. of Algebra* **269** (2003), 263–274.
- [60] GODELLE E., Parabolic subgroups of Artin groups of type FC. *Pacific J. Math.* **208** (2003), 243–254.
- [61] GODELLE E. ET PARIS L., On Singular Artin monoids. *Contemporary Math.* **372** (2005), 43–58.
- [62] GODELLE E., Quasi-centraliser of LCM-homomorphisms. *Communications in Algebra* **34** (2006), 3167–3181.
- [63] GODELLE E., KAPLAN S. ET TEICHER M., Conjugacy in Artin groups and application to the classification of surfaces. *Journal of Algebra and Applications* **5** (2006), 563–570.
- [64] GODELLE E., Artin group with CAT(0) Deligne complex. *Journal of Pure and Applied Algebra* **208** (2007), 39–52.
- [65] GODELLE E., Représentation par des transvections de groupes d'Artin-Tits. *Groups, Geometry and Dynamics* **2** (2007), 111–133.
- [66] BELLINGERI P. ET GODELLE E., Questions on surface braid groups. *Journal of Knot theory and its ramifications.* **16** (2007), 1219–1233.
- [67] GODELLE E., Parabolic subgroups of Garside groups. *J. of Algebra* **317** (2007), 1–16.
- [68] GODELLE E., The braid rook monoid. *IJAC* **18** (2008), 779–802.
- [69] GODELLE E., Parabolic subgroups of Garside groups II : ribbons. *JPA* **214** (2010), 2044–2062.
- [70] GODELLE E., The stable set of a self map. *Advances in Applied Math* **45** (2010), 438–448.
- [71] GODELLE E., Presentation of Renner monoids. *à paraître dans Bulletin of the Aust. Maths Soc.*
- [72] GODELLE E., Generic Hecke Algebra for Renner monoids. *Arxiv :GR/1002.1236, soumis.*
- [73] GODELLE E. ET PARIS L., The $K(\pi, 1)$ problem for Artin-Tits groups and applications to virtual braid groups. *Arxiv :GR/1007.1365, soumis.*
- [74] GODELLE E. ET PARIS L., Locally Garside groups of FC type. *en cours de rédaction.*

- [75] GODELLE E., Garside subgroups of Garside groups. *preprint 2002*
- [76] GROMOV M., Hyperbolic groups. *Essays in group theory* 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York, 1987.
- [77] HALVERSON T., Representation of the q -rook monoid. *J. Algebra* **273** (2004), 227–251.
- [78] HOWIE J., An introduction to semigroup theory. *Academic Press*, London New-York San Francisco, 1976.
- [79] HOWLETT, R., Normalizers of parabolic subgroups of reflexion groups. *J. London Math. Soc.* **21** **1** (1980), 62–80.
- [80] HUMPHREYS J., *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29. Cambridge University Press, 1990.
- [81] IMRICH W. ET TURNER E.C., Endomorphisms of free groups and their fixpoints. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **105** (1989), 421–422.
- [82] JACO W. ET SHALEN P. B., Surface homeomorphisms and periodicity. *Topology* **16** (1977), 347–367.
- [83] Justin J. et Pirillo G., Episturmian words and episturmian morphisms. *Theoret. Comput. Sci.* **276** (2002), 281–313.
- [84] KAC V. ET PETERSON D., Infinite flag varieties and conjugacy theorems. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **80** (1980), 1–32.
- [85] KAC V. ET PETERSON D., Defining relations on certain infinite-dimensional groups. *Proc. Cartan Conference Lyon 1984 Astérisque* (1985), 165–208 (numero hors serie).
- [86] KASSEL C. ET REUTENAUER C., Sturmian morphisms, the braid group B_4 , Chistoffel words and bases of F_2 *Ann. Math. Pura. Appl.* **186** (2007), 317–339.
- [87] KRAMMER D., Braid groups ae linear. *Ann. of Math.* **155** (2002), 131–156.
- [88] KRAMMER D., A class of Garside groupoid structures on the pure braid group. *Transaction AMS* **360** (2008), 4029–4061.
- [89] LI Z. ET RENNER L., The Renner monoids and cell decompositions of the symplectic algebraic monoids. *IJAC* **13** (2003), 111–132.
- [90] LI Z., The Cross Section Lattices and Renner monoids of the odd Special Orthogonal algebraic monoids. *semigroup forum* **66** (2003), 272–287.
- [91] LI Z., Idempotent lattices, Renner monoids and cross section lattices of the Special Orthogonal algebraic monoids. *J. Algebra* **270** (2003), 445–458.
- [92] LIPSCOMB S., *Symmetric inverse semigroups*. Mathematical Surveys and Monographs 46 American Mathematical Society, 1996.
- [93] MANFREDINI S. Some subgroups of Artin’s braid group. *Topology and its applications* **78** (1997), 123–142.
- [94] MICHEL J., A note on words in braid monoids. *J. Algebra* **215** (1999), 366–377.

- [95] MOKLER C., An analogue of a reductive algebraic monoid, whose unit group is a Kac-Moody group. *Mem. Amer. Math. Soc.* **823** (2005) 90 pp.
- [96] MOKLER C., The maximal chains of the extended Bruhat orders on the $W \times W$ -orbits of an infinite Renner monoid. *Comm. Algebra* **35** (2007), 2298-2323.
- [97] MOKLER C., Actions of the face monoids associated to a Kac-Moody group on its buildings. *J. Algebra* **321** (2009), 2384–2421.
- [98] MOUSSONG G., Hyperbolic Coxeter groups. Ph.D. Thesis, Ohio State University, 1988.
- [99] NIBLO G.A. ET REEVES L. D., The geometry of cube complexes and the complexity of their fundamental groups. *Topology* **37** (1998), 621–633.
- [100] OKONEK C., Das $K(\pi, 1)$ -Problem für die affinen Wurzelsysteme vom Type A_n, C_n . *Math. Z.* **168** (1979), 143–148.
- [101] PARIS L., Parabolic subgroups of Artin groups. *J. Algebra* **196** (1997), 369–399.
- [102] PARIS L., Centralizers of parabolic subgroups of Artin groups of type A_l, B_l and D_l . *J. Algebra* **196** (1997), 400–435.
- [103] PARIS L., Artin monoids inject in their groups. *Comment. Math. Helv.* **77** (2002), 609–637.
- [104] PARIS L., The proof of Birman’s conjecture on singular braid monoids. *Geom. Topol.* **8** (2004), 12811300.
- [105] PIOLLET D., Sur le groupe d’automorphismes du groupe libre. I : Transvections. *J. Algebra* **222** (1999), 621–677.
- [106] Poggi-Corradini P., Iteration of analytic self-maps of the disk : an overview. *Cubo* **6** (2004), 73–80.
- [107] POPOVA L.M., Defining relations in some semigroups of partial transformations of a finite set. *Uchenye Zap. Leningrad Gos. Ped. Inst.* **218** (1961), 192–212.
- [108] PENNEL E., PUTCHA M. ET RENNER L., Analogue of the Bruhat Chevalley order for reductive monoids. *J. Algebra* **196** (1997), 139–169.
- [109] PICANTIN M., The center of thin gaussian groups. *J. of Algebra* **245** (2001), 92–122.
- [110] PUTCHA M., Monoid Hecke Algebras. *Trans. AMS* **349** (1997), 3517–3534.
- [111] PUTCHA M., Monoids on groups with BN-Pairs. *J. Algebra* **120** (1989), 139–169.
- [112] PUTCHA M., Monoids of Lie type. *Semigroups, formal languages and groups*, J. Fountain, Ed., Klumer Academic Publishers (1995), 353-367.
- [113] PUTCHA M. ET RENNER L., Morphisms and Duality of Monoids of Lie type. *J. Algebra* **184** (1996), 1025–1040.

- [114] RENNER L., *Linear algebraic monoids*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 134, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups V. Springer-Verlag, 2005.
- [115] RENNER L., Finite reductive monoids. *Semigroups, formal languages and groups*, J. Fountain, Ed., Klumer Academic Publishers (1995) 369-380.
- [116] RICHOMME G., Lyndon morphisms. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society* **10** (2003), 761-785.
- [117] RODRIGUES O., Note sur les inversions, ou dérangements produits dans les permutations. *J. de Math.* **4** (1839), 236-239.
- [118] SALVETTI M., The homotopy type of Artin groups. *Math. Res. Lett.* **1** (1994), 565-577.
- [119] SHALLIT J. ET WANG M., On two-sided infinite fixed points of morphisms. *Theoret. Comput. Sci.* **270** (2002), 659-675.
- [120] SOLOMON L., The Bruhat decomposition, Tits system and Iwahori ring for the monoid of matrices over a finite field. *Geom. Dedicata* **36** (1990), 15-49.
- [121] SOLOMON L., An introduction to reductive monoids. *Semigroups, formal languages and groups*, J. Fountain, Ed., Klumer Academic Publishers (1995) 295-352.
- [122] SOLOMON L., Representations of the rook monoid. *J. Algebra* **256** (2002), 309-242.
- [123] SPRINGER T., Intersection cohomology of $B \times B$ -orbit closures in group compactifications. *J. Algebra* **258** (2002), 71-111.
- [124] VAN DER LEK H., The homotopy type of complex hyperplane complements. *Ph. D. Thesis*, Nijmegen, 1983.
- [125] SHPILRAIN V., representing braids by automorphisms. *IJAC* **11** (2001), 773-777.
- [126] VENTURA E., Fixed subgroups in free groups : a survey. *Contemp. Math.* **296** (2002), 231-255.
- [127] WADA M., Group invariants of links. *Topology* **31** (1992), 399-406.